В. М. ПАПОВСКИЙ
Н. М. ПУЛЬЦИН

# Углублённое изучение ГЕОМЕТРИИ в 10 КЛАССЕ

В. М. ПАПОВСКИЙ
Н. М. ПУЛЬЦИН

# Углублённое изучение ГЕОМЕТРИИ в 10 КЛАССЕ

**Методические рекомендации к учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика**

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

*2-е издание*

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:514 **16+**
ББК 74.262.21
П17

**Паповский В. М., Пульцин Н. М.**
П17 Углублённое изучение геометрии в 10 классе. Методические рекомендации к учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика : учеб. пособие для общеобразоват. организаций. — М. : Просвещение, 2017. — 192 с. — ISBN 978-5-09-043036-4.

Книга предназначена для учителей, работающих в классах с углублённым изучением математики по учебнику А. Д. Александрова и др. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс». В ней представлены основные идеи школьной геометрии и особенности её изложения в упомянутом учебнике.

**УДК 372.8:514**
**ББК 74.262.21**

Учебное издание

Паповский Вилен Михайлович
Пульцин Николай Михайлович

Углублённое изучение геометрии в 10 классе
Методические рекомендации
к учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова. Редакторы Н. Б. Грызлова, И. В. Рекман. Младший редактор Е. А. Андреенкова. Художественный редактор О. П. Богомолова. Компьютерная графика И. В. Губиной. Корректор Н. В.Игошева

**ISBN 978-5-09-043036-4**

# ВВЕДЕНИЕ

Необходимость данной книги осознаётся особенно ясно теперь, когда требования Федерального государственного образовательного стандарта второго поколения предполагают:

на базовом уровне:

«…1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

6) владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием»;

на углублённом уровне:

«…2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат».

Курс, представленный в учебниках «Геометрия» для 10 и 11 классов авторов А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика, своими целями, многими методами и приёмами направлен на достижение изложенных целей.

Действительно, сущность геометрии противоречива: «...в ней непосредственно изучаются идеальные геометрические фигуры, которых нет в действительности, но её выводы применимы к реальным вещам, к практическим задачам» (*Александров А. Д.* Диалектика геометрии // Математика в школе. — 1986. — № 1. — С. 13).

Например, в учебнике геометрическим телом (см. п. 19.3) называется фигура, у которой, в частности, «есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить ломаной (или отрезком), которая целиком проходит внутри фигуры». Внутренняя точка фигуры в пространстве — это такая её точка, которая является центром шара, содержащегося в данной фигуре. Мы говорим с учащимися о геометрических телах, употребляя такие выражения: «Вот деревянный куб», «Токарь выточил на станке шар». Но ведь все эти и другие материальные объекты не являются такими телами в смысле приведённых выше фрагментов определения. О каких их внутренних точках можно говорить, если они состоят из атомов, молекул, элементарных частиц; какими отрезками, ломаными, состоящими из внутренних точек, их можно соединять? Но это не мешает нам формулировать определение геометрического тела и применять его.

Так мы подходим к противоречию уже в методике преподавания геометрии, индуцируемому указанной выше противоречивостью самой геометрии, — это противоречие между живым воображением и логикой.

Возникает вопрос: так что же, отказаться от логики и учить по картинке? Конечно, нет! «Воображение даёт непосредственное видение геометрического факта и подсказывает логике его выражение и доказательство, а логика, в свою очередь, придаёт точность воображению... Отсюда принцип преподавания: ...следует начинать с наглядной картинки — с рисунка на доске, описания, показа моделей, примеров... Вместе с рисунком должно идти разъяснение, возбуждающее верное пространственное представление... Логически организованное представление даёт нужную формулировку определения, теоремы или задачи. За этим вступают в действие логические доказательства» (*Александров А. Д.* О геометрии // Математика в школе. — 1980. — № 3. — С. 59). Это в конечном итоге и есть геометрический метод. К нему и должен быть приучен ученик.

Как бы то ни было, но геометрическое тело, определение которого вырабатывалось на уроке, идеально. Его в действительности нет. Как к этому факту относится ученик? С одной стороны, такой факт — некая мотивация необходимости учить определение (или по крайней мере понимать необходимость его требования и знать его суть). Чего греха таить, нередко ученик не вникает в определение, считая, что, если понятие названо достаточно знакомым словом, значит, учить определение не надо: и так понятно. Показав, что математический объект отличается от одноимённого в житейской практике и требует специальных «правил обращения» с ним, мы мотивируем необходимость сравнения идеального и материального объектов и хорошего знания математического определения. С другой стороны, чрезмерное подчёркивание отличия материального объекта от его идеализации может привести к некоторому недоверию к теории у неподготовленного ученика. Поэтому после определения идеального объекта обязательно необходимо показать (в учебнике это делается либо в теории, либо в задачах) выход его в практику непосредственно или через соответствующую теорию. И в этом опять конкретно проявляются и разрешаются противоречия, сформулированные ранее.

Таким образом, даже из приведённого примера видно, как изучение геометрии формирует метапредметные и личностные умения, обеспечивая понимание роли и места математики в человеческой деятельности.

Авторы учебника последовательно в каждом параграфе теории, в каждом наборе задач проводят идеи единства теории и практики, наглядности и логики, конкретного и абстрактного, идею диалектики познания и развития понятия, в конце концов идею геометрии как метода познания мира.

Учителя математических классов обладают достаточной квалификацией, и нет необходимости давать для них все планы уроков. Свою задачу мы видим в том, чтобы помочь им в реализации той генеральной геометрической линии, которая прорисовывается в учебнике.

Поэтому книга «Углублённое изучение геометрии в 10 классе» есть не только методическое пособие, но и рассказ об опыте конкретной работы конкретного учителя. Автор хочет, чтобы у читателя возникло ощущение некоей беседы с коллегой, который имеет достаточный опыт работы с учебником и неназойливо делится своим опытом. Этим объясняются некоторые непривычные моменты в построении данного пособия.

Например:

1. Употребляются словесные обороты, используемые не столько в методической литературе, сколько в устной речи.

2. Имеются некоторые повторения. К примеру, иногда в комментариях к главам 10 класса есть положение, повторяющееся в начальном обзоре и в итоговом размышлении. Автор как бы сначала рекламирует особенности главы, а в конце её подводит итоги и, ссылаясь на предшествующий рассказ, подтверждает выполнение обязательств, просит заново с позиции прочитанного осознать положения, сформулированные в начале главы. Ситуация напоминает процесс доказательства теоремы на уроке — сначала сообщается: «Дано: ...», «Доказать: ...», а после доказательства говорится: «Таким образом, доказано, что...» Поэтому учителю, приступающему к изучению какой-либо главы, полезно прочитать предварительно весь материал, посвящённый этой главе.

3. Разные варианты уроков, их организация (семинары, коллективная работа, работа самопроверки, уроки придумывания задач и т. д.) даны попутно, в беседе о содержании глав учебника. Изложение такого материала компактно требовало бы от авторов более подробной и тщательной проработки и классификации соответствующих разделов, на что они не претендуют.

Каждый учитель, естественно, волен не применять такие формы уроков или применять их совсем не на том уроке, для которого они рекомендованы.

4. Календарные планы, системы уроков, естественно, только примерные.

5. Учителю предлагаются различные цепочки задач, которые связаны общей мыслью, в которых одна развивает идею другой. Но и эти цепочки практикующий учитель может дополнить или изменить в нужном ему направлении.

Задач в учебнике много. Среди них достаточное число вполне традиционных задач. Вместе с ними учитель найдёт и такие, которые соответствуют повышенным требованиям к пространственному мышлению школьника, его математической культуре, логике, умению применять полученные знания в задачах прикладного характера. Разнообразие задач обусловлено многочисленными и порой противоречивыми тенденциями, присущими самой геометрии и её преподаванию, которые нашли своё отражение в установках учителя и его практической работе. Большое количество задач делает неуместным стремление решить их все или даже как можно больше. Учителю надо выбрать из предлагаемого набора задач те, что он сам считает важными, варьируя их в зависимости от уровня подготовки и мотивации класса, интересов других предметов и т. д.

Для удобства задачи довольно мелко дифференцированы по рубрикам. Названия рубрик весьма условны, они дают только первоначальную ориентацию. Ясно, что содержательная задача может быть отнесена к нескольким рубрикам, поэтому предлагаемое разбиение по рубрикам отражает только авторское предложение.

В учебнике есть разделы, изучающие не столько геометрические тела как множества точек пространства, сколько объекты более сложной природы: векторы, преобразования пространства. Изучение этих разделов вкупе с аналитическим методом даёт возможность решать новые классы задач, а также существенно упрощать решения задач уже известных видов. Вместе с тем изучение указанных разделов (даже в ознакомительном плане) значительно повышает общий уровень культуры учащихся, приближает их к современным воззрениям на предмет и методы изучения математики.

В учебнике весьма много пока ещё непривычных для российской школы задач. Их формулировки дают простор для фантазии ребёнка, однако множество возможных ответов на эти задачи зачастую бесконечно. Поэтому в данном пособии, как правило, приведён лишь один из возможных ответов, что не означает, что он является единственно верным. Следует также обратить внимание на то, что среди задач учебника есть ряд задач с противоречивым или недостаточным для единственности либо конечности ответа условием. Такие задачи, равно как и задачи, точное и полное решение которых представляет значительную трудность, авторы постарались отметить. Поэтому нужно относиться внимательно и осторожно к решениям, в которых встречаются слова «очевидно» или «ясно, что». Иногда это означает, что авторы прибегли к геометрической интуиции и не провели строгого доказательства. Кроме того, в решениях многих задач (в основном многопунктных и технических) освещались лишь некоторые пункты решения, представляющие, по мнению авторов, геометрический интерес.

Отдельные простые задачи, предназначенные в основном для устной работы либо полностью аналогичные уже разобранным, не разбирались.

Определения и обозначения стереометрических объектов соответствуют принятым в учебниках «Геометрия. 10 класс» и «Геометрия. 11 класс» А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика.

Условия задач в данном пособии не приводятся. Обозначения в решениях такие же, как и в условиях задач из названных учебников.

Укажем ещё на некоторые условности в обозначениях, применяемых в пособии.

В решениях подробные тождественные преобразования опускаются. Формулы стандартных отрезков и величины стандартных углов плоских фигур (например, радиус вписанной окружности правильного многоугольника через его сторону) предполагаются известными. Решённой считается задача, сведённая к планиметрической. Всюду, где не оговорено противное, параллелограмм подразумевается частным случаем трапеции. Совпадающие прямые считаются частным случаем параллельных.

В пособии приняты следующие правила наименования прямоугольных и равнобедренных треугольников.

Вершины прямоугольного треугольника перечисляются в таком порядке, что вершина прямого угла называется второй. Например, фраза «прямоугольный треугольник $ABC$» означает, что угол $ABC$ равен 90°.

Равнобедренный треугольник именуется так, что его вершина называется второй. Например, фраза «равнобедренный треугольник $ABC$» означает, что $|AB| = |BC|$.

Кроме того, по отношению к равнобедренному треугольнику термин «боковая высота» применяется для обозначения высоты, проведённой на боковую сторону треугольника.

Углами между гранями многогранников, если не оговорено противное, считаются углы между плоскостями этих граней.

Всюду, где не оговорено противное, под проекциями рёбер многогранников подразумеваются проекции прямых, содержащих эти рёбра.

Если в задаче требуется найти угол, ответом служит, как правило, тригонометрическая функция этого угла, вкупе со смыслом задачи однозначно определяющая этот угол. Например, если требуется найти угол между прямой и плоскостью, который по определению не тупой, то такой функцией может служить синус.

В пособии используется следующая формулировка теоремы о трёх перпендикулярах (см.: «Геометрия. 10 класс», задача 7.1): проекция прямой на плоскость перпендикулярна прямой в этой плоскости вместе, и только вместе с самой проектируемой прямой. В данной формулировке не требуется прохождения всех указанных прямых через одну точку.

Всюду, где не оговорено противное, плоские углы трёхгранного угла обозначаются строчными греческими буквами ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$), а противолежащие им двугранные углы — прописными латинскими буквами ($A$, $B$, $C$). Сам трёхгранный угол будем обозначать четырьмя буквами, первая из которых обозначает вершину, а остальные три поставлены по одной на рёбрах.

В решении задач на интуитивном уровне используются понятия симметрии различных типов и гомотетии в пространстве. По мнению авторов, это согласуется с принятым в учебнике уровнем строгости.

Данный УМК состоит из учебника, методических рекомендаций (данное пособие), дидактических материалов и электронной формы учебника. Дидактические материалы содержат самостоятельные и контрольные работы для учащихся в двух вариантах. Методические рекомендации и дидактические материалы размещены на сайте издательства «Просвещение» (www.prosv.ru) в разделе «Методическая помощь».

**Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствует по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника, включает в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

**Функциональные особенности ЭФУ:**

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и офлайн-режимах;
- тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
- возможность добавления материалов, созданных учителем;
- инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
- удобная навигация.

**Педагогические возможности использования ЭФУ:**

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Практика обучения показывает, что начало работы по геометрии в 10 классе — один из труднейших моментов и для ученика, и для учителя. Это некий «узел», в который «входят» со знанием девятилетки, с отработанными там методами решения задач и «переваривания» теории. В таком «узле» старое переплетается с новыми знаниями и, самое главное, с новым отношением к теории, с новыми методами решения задач, с непривычными требованиями к пространственному и формально-логическому мышлению. Из этого узла ученик должен «выйти» обогащённым конкретным знанием основ стереометрии и, что не менее важно, приняв необходимость тех методов, с которыми он познакомился. Для такого «перерождения» ученика авторы разнообразно и целеустремлённо работают с ним прежде всего в главе I.

## ГЛАВА I. ОСНОВАНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

На самом первом уроке происходит методологически важная беседа о предмете, методе геометрии (см. Введение), знакомство с определениями многих многогранников и простейшими правилами их изображения. Все эти понятия в своё время, в последующих главах учебника, будут введены логически последовательно.

Важно отметить, что ученики и учителя математической школы впервые получают адресованный им учебник, в котором дана полная система аксиом (правда, они зависимы — см. пункт 6.3), из которых выводятся все необходимые утверждения с достаточной строгостью, без логических разрывов. Но, последовательно проводя свою линию (а в этой главе нужно учитывать, что учитель имеет дело практически ещё с девятиклассниками), авторы учебника уделяют много внимания наглядности аксиом, их связи с практикой, смыслу слов и фраз, составляющих аксиомы, переходу из плоскости в пространство, логике самого материала и его изложения.

### § 1. Аксиомы стереометрии

Учитывая важность фактически каждого абзаца, каждого примера и контрпримера в этом параграфе, можно посоветовать учителю такие формы работы на уроке, где во главу угла ставится умение работать с учебником. Однако далеко не все ученики справятся с подобной работой. Поэтому можно рекомендовать, например, такую форму: класс разбивается на группы. Каждая группа изучает (а потом и обсуждает) одну из аксиом с комментариями к ней и готовит сообщение — «защиту» своей аксиомы. Представители этой группы рассказывают затем классу содержание аксиомы, её наглядный смысл, раскрывают её связь с практикой и понимание отдельных моментов (примеры и контрпримеры). Такой рассказ отнюдь не предполагает связную лекцию — он провоцируется вопросами учеников и учителя. Записывается название аксиомы (символическая запись, если ученики этому научены). Каждый ученик, кроме того, записывает коротко то, что он считает нужным запомнить из дискуссии (это ещё и обучение умению конспектировать). И так с каждой аксиомой! Такая работа занимает 1,5 урока.

Однако, учитывая, что это первые уроки геометрии в 10 классе и вряд ли ученики обучены таким формам работы, учитель, вероятнее всего, обратится либо к лекции-беседе (а содержание параграфа даёт материал и для постановки проблемных вопросов, и для мотивации словесных уточнений), либо даже просто к чтению вслух на уроке § 1 учебника, особенно в классе, не приученном к работе с книгой (однако и в этом случае полезно после риторических вопросов текста просить учеников закрывать учебники и предлагать свои ответы). После такого чтения можно обсудить заранее подготовленные на доске вопросы, хотя бы такие:

1. Сколько аксиом мы прочли? О чём они? (Как вы думаете, почему они так названы?)

2. Вы получили задание: рассказать про определённую аксиому. Каков будет примерный план ответа?

3. Как доказать, что в пространстве есть плоскости? прямые?

4. Докажите, что вне прямой есть точки. А вне плоскости?

5. Можно ли через две точки $A$ и $B$ провести две плоскости $\alpha$ и $\beta$? Пусть на каждой из этих плоскостей найдено $|AB|$. Почему оно одинаковое?

6. Что значит: точка лежит на границе полупространства, внутри полупространства; фигура лежит по одну сторону от плоскости, по разные стороны от плоскости?

7. Решите (устно) задачи **1.10**, **1.11**. Для каких аксиом и определений эти примеры являются контрпримерами?

Письменно решается задача **1.31** (назовём её задачей-теоремой, она будет часто использоваться при решении задач в дальнейшем). После этого можно устно разобрать задачу **1.3**.

Некоторых комментариев требует лишь аксиома расстояния. В пространстве каждым двум точкам соответствует единственная величина, называемая расстоянием между ними. Однако на множествах точек разных фигур можно задать расстояние по-разному. Если имеется множество точек, на котором выполняются аксиомы планиметрии (в том числе и аксиомы расстояния), то такое множество называется плоскостью. Более того, если фигура плоскостью не является, то расстояние между двумя её точками равно расстоянию между ними в плоскости, их содержащей (а то, что это расстояние одинаково для всех плоскостей, следует из его единственности). Так, например, расстояние между двумя точками сферы равно длине соответствующей хорды сферы.

Возможно, что некоторым учителям покажется предпочтительнее такая формулировка аксиомы: «В пространстве каждым двум точкам $A$ и $B$ соответствует единственная положительная величина, называемая расстоянием между ними, удовлетворяющая условиям...» (далее указаны требования к расстоянию в зависимости от того учебника, по которому ребята учились в девятилетке). После такой формулировки быстрее усваивается мысль, что расстояние между точками $A$ и $B$ на плоскостях — это расстояние между ними в пространстве (поскольку указанные свойства определяют единственную величину).

После этого можно отметить остальные свойства расстояний — следствия из этой аксиомы. Это даст возможность больше не возвращаться к вопросу о расстояниях до конца главы (§ 6).

## ***Задачи к* § 1**

**1.21.** Рассмотрим, например, решение задачи **1.21** б.

На плоскости есть точка, вне плоскости есть точка. Через эти две точки можно провести плоскость, в ней — прямую. Прямая не может иметь с данной плоскостью ещё одну общую точку, иначе она (а вместе с ней и взятая вне данной плоскости точка) лежит в данной плоскости. Таким образом, построенная прямая и данная плоскость пересекаются (каждое предложение из этого доказательства обосновывается соответствующим утверждением из § 1 или планиметрии).

Аналогично разбираются задачи **1.21** а, **1.21** в. Хотелось бы сделать лишь несколько замечаний.

1. Пока не стоит писать ($ABC$), ($AB$), ибо не доказана единственность соответствующих объектов.

2. В приведённом выше решении через две точки сначала проводят плоскость и только в этой плоскости — искомую прямую.

**1.22.** Обозначим данную ломаную $ABC$, данную плоскость α.

Пусть $A$ и $C$ лежат в разных полупространствах относительно α. Тогда возможны следующие положения точки $B$:

1. $B \in \alpha$. Тогда ломаная пересекает α.

2. $B \notin \alpha$. Тогда $B$ лежит в одном полупространстве либо с $A$, либо с $C$ и соответственно в разных полупространствах либо с $C$, либо с $A$. Тогда соответственно либо $BC$, либо $AB$ (а значит, и ломаная) пересекает α.

Обобщение на $n$-звенную ломаную. Ученики, освоившие в девятилетней школе метод математической индукции, могут доказать это обобщённое утверждение. (Хотя доказывать обобщения — и учителю это надо учитывать — не является обязательным. Нередко подобные вопросы являются упражнениями на пространственное мышление учащегося.

Их доказательство откладывается до соответствующего момента прохождения программного материала.)

*Задачи к пунктам 1.1, 1.2, 1.3.* Задачи **1.10—1.15** направлены в первую очередь на развитие пространственного мышления учащегося. Отметим, что среди этих задач есть контрпримеры для соответствующих аксиом и определений § 1.

Особого внимания заслуживает задача **1.31**. Она играет большую роль при решении последующих задач. Рассмотрим два её доказательства.

**1.31.** I способ.

$A$ — общая точка $\alpha$ и $\beta$. Значит, их пересечение есть общая прямая $m$. Вне этой прямой у $\alpha$ и $\beta$ нет других общих точек (см. хотя бы пояснение к аксиоме пересечения плоскостей). Значит, $A$, $B \in m$, что и требовалось доказать.

II способ.

1. $A \in \alpha$, $B \in \alpha$. Тогда в $\alpha$ есть единственная прямая $m$ ($A \in m$, $B$) (по аксиоме планиметрии).

2. Но $A \in \beta$, $B \in \beta$. Значит, по аксиоме принадлежности прямой плоскости $m \subset \beta$.

3. Тогда $m$ — общая прямая $\alpha$ и $\beta$, а точки $A$ и $B$ лежат на этой общей прямой, что и требовалось доказать.

Заметим, что задача эта играет большую роль хотя бы по двум причинам: пропедевтика теоремы 2.1 и частое использование этой задачи при построении сечений, в связи с чем допустима даже и более резкая её формулировка: «Две плоскости имеют две общие точки. Докажите, что эти плоскости пересекаются по прямой, содержащей эти точки».

Задачи **1.3**, **1.4** легко решаются ссылкой на задачу **1.31** (хотя можно свести всё и к аксиоме пересечения плоскостей).

Специального разговора требуют задачи на сечения. Задачи **1.5—1.9** являются набором примеров и контрпримеров, заставляющих ученика смотреть на сечения в разных ракурсах. Действительно, в задачах **1.7—1.9** как бы одни и те же «действующие лица»: сечения и их общие отрезки. Но в задаче **1.7** сечения названы, в задаче **1.8** их уже предлагается выбрать ученикам, а в задаче **1.9** предлагается найти несколько вариантов возможных сечений. Эта задача может быть использована учителем как пропедевтика будущего приёма поворота около прямой, «шевеления». Для ученика же важно, что задача **1.9** в некотором смысле обратная для задачи **1.7**. Задачи **1.5** а—г как бы образуют одну серию, задачи **1.5** д—е — другую. Но нельзя привыкать к стандарту. И появляются задачи **1.5** ж и **1.5** з. Это опережающие задачи. Увидеть, что сечение построено неверно и в этом случае (продлив, например, отрезки $LM$ и $KN$), сможет далеко не каждый ученик (авторы пособия в будущем ставят сами такой вопрос, и дело учителя — давать сейчас задачу **1.5** з или повременить). Но как стимул, показ узости стандарта и богатства возможностей таких задач, как пропедевтика будущих решений такая задача — к месту!

Хотелось бы сделать следующее замечание. Определение сечения фигуры как пересечения соответствующих множеств зачастую плохо «работает». Ученик нередко рисует часть сечения, забывая, что надо нарисовать множество всех общих точек фигуры и плоскости. Поэтому, хотя бы для многогранников, можно пояснить это определение учащимся: «Чтобы построить сечение многогранника плоскостью, полезно выяснить, с какими гранями многогранника и по каким отрезкам эта плоскость пересекается». Эта фраза впоследствии поможет короче и компактнее объяснить решение задач на сечения и ошибки в чертежах. Хочется также обратить внимание на слово «нарисуйте» в заданиях. Оно означает, что главное в этих задачах — изобразить «картинку» (что не отрицает осознанного поиска и грамотного пояснения). Все эти задачи, и не только они, связаны с задачей **1.31**. Можно поступать и так: предложить желающим ученикам рисовать в таких случаях сечения и за серию правильно выполненных рисунков ставить оценку (справедливо полагая, что на этом начальном этапе такие рисунки свидетельствуют об определённом уровне развития пространственного мышления автора рисунка).

Коротко об остальных задачах.

**I.1.** Эта задача — первое использование имеющегося у ученика интуитивного представления о непрерывности, она способствует развитию пространственного мышления ученика.

Далее было бы полезно решить задачу **I.16**, ибо она позволяет существенно поработать над развитием пространственного мышления.

**I.16.** Задачи под этим номером допускают по крайней мере два подхода. Один из них статический — указать, «угадать» искомое сечение, доказав затем, что оно именно такое. Но этот подход мало помогает развитию пространственных представлений. Поэтому более заслуживает внимания динамический подход, когда учащийся в своём воображении «шевелит» сечение, использует непрерывность.

а) Может. Это грань правильного тетраэдра. Но только ли? А если станем перемещать плоскость грани параллельно себе?

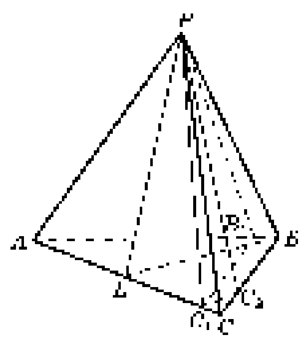


Рис.1

б) Пусть $L$ — середина ребра $AC$ правильного тетраэдра $PABC$ (рис. 1). Тогда $BLP$ — искомое сечение. Можно привести другие примеры. Но намного интереснее и полезнее завести разговор, оттолкнувшись от задачи **I.16** а и представляя модель «в динамике».

Грань $BPC$ — треугольник не только равнобедренный, но и равносторонний. Наша задача, сохранив равенство двух сторон, сделать третью неравной им. Это можно сделать, например, так: точку $P$ зафиксируем, а $CB$ станем перемещать параллельно самой себе в плоскости $ABC$.

Есть ли другие способы? Есть. Фиксируем $BP$. Двигаем третью вершину по $AC$. А ещё? И т. д.

в) $PL \perp AC$. Тогда при любом выборе $C_1$ внутри $CL$ (см. рис. 1) угол $PC_1C$ тупой. Повернём $(PCC_1)$ вокруг $(PC_1)$ так, чтобы угол, которым заменится $\angle PC_1C$, ещё не перестал быть тупым (положение типа $PC_1C_2$). Получим искомое сечение.

г) Поворачивая и дальше сечение (или двигая переменную третью вершину по $CB$, затем по $BA$), в конце концов получим $\triangle AC_1P$ с острым углом $AC_1P$. Значит, в какой-то момент сечение было прямоугольным (см. рис. 1).

д), е) Пусть $L$, $M$, $N$, $K$ — середины соответствующих рёбер (рис. 2). Тогда $MNKL$ — ромб. Из равных равнобедренных треугольников $AKP$ и $PLB$ следует, что $|LN| = |KM|$. Значит, $KLMN$ — квадрат. Двигая его так, чтобы стороны нового сечения оставались параллельными сторонам прежнего (наглядно это ясно), получим в сечении прямоугольник. (Разумеется, всё это можно сделать и строго, но на данном этапе это не представляется необходимым.)

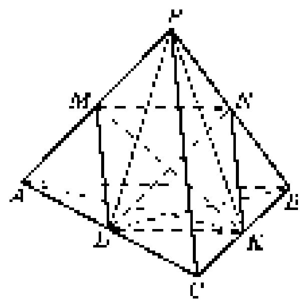


Рис.2

**1.14.** б) Задача решается на наглядном уровне. Для оживления ситуации перефразируем задачу так: «Есть булочка с изюминками, запечёнными в ней (пусть их будет 10). Можно ли её разрезать одним плоским разрезом ножа так, чтобы число изюминок в получившихся двух частях было одинаковым?» (Изюминки, попавшие под нож, можно договориться не считать или, наоборот, считать в обеих частях.)

Выберем какую-то плоскость и будем надвигать её на эту булочку параллельно самой себе. В какой-то момент она пройдёт через одну изюминку. Если при этом она проходит ещё через одну, то чуть «пошевелим» плоскость так, чтобы первая изюминка осталась в ней, а вторая — нет. Продолжая движение такой плоскости, станем следить, чтобы число изюминок с одной стороны увеличивалось ровно на одну за каждый этап. В какой-то момент и слева, и справа окажется одинаковое число изюминок.

Можно действовать иначе (из наглядных соображений). Через каждые три точки проведём плоскость. С обеих сторон от неё подсчитаем число точек. Если оно одинаково, задача решена. Если нет, то выберем ту из них, для которой разница составляет одну или две точки, и получим из неё искомую плоскость «малым шевелением» около двух или одной неподвижной точки. Аналогично можно рассмотреть ситуацию и в плоскости.

Приведённое выше решение ученики могут понять лишь в конце главы I. Поэтому уместно рассмотреть эту задачу именно тогда, а не после § 1.

**1.15.** В ней встречается ситуация, которая не совсем привычна. Обычно, когда ставится вопрос, подразумевается, что на него есть определённый ответ, чаще всего единственный. Однако легко понять, что для невыпуклой призмы и пирамиды вопрос теряет смысл, а для шара и круга ответ: бесконечно много. Кроме того, заметим, что уместно уточнить вопрос задачи: Каково наименьшее число полупространств, пересечением которых является ... ? И т. д.

**1.16.** Задача может быть рекомендована (на этом этапе) как итоговая по сечениям.

**1.32.** Задача только на доказательство (с элементами опережения).

Задачи **1.17**, **1.23**, **1.24** помогают осознать, что соответствующие утверждения планиметрии имеют место и в пространстве.

**1.18.** а) I с п о с о б.

Проведём медиану $BB_1$ в $\triangle ABC$ (рис. 3). Из $\triangle PBB_1$ по теореме косинусов находим $\angle PBB_1$, а из $\triangle PQB$ находим $|PQ|$.

II с п о с о б.

Проведём $ST \parallel BC$ через $Q$ (см. рис. 3). Вычислим $|ST|$, $|PS|$, а затем $|PQ|$ из $\triangle PST$.

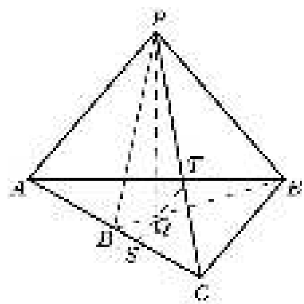


Рис.3

**1.19.** С одной стороны, задача заставляет повторить технику построения сечений и задачу-теорему **1.31**, с другой — помогает осознать заново основные факты планиметрии. Возможно, именно при решении этой задачи стоит обратить внимание учащихся на то, что при решении задачи по стереометрии полезно изображать некоторые «плоские» фрагменты отдельными чертежами.

*О задачах на равенство и подобие*. Можно спорить о целесообразности рассредоточения задач на эту тему авторами пособия (ведь первые задачи, требующие применения равенства треугольников, появляются уже в пункте 1.1), но несомненно, что работа с такими задачами протяжённа по времени и должна проводиться осознанно.

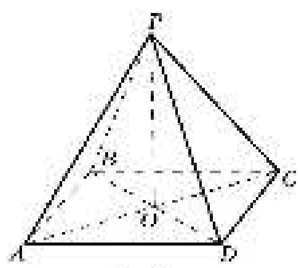


Рис.4

Рассмотрим некоторые задачи по этой теме.

**1.2.** Следует из равенства медиан равных треугольников, проведённых к соответствующим сторонам.

**1.25.** а) (Рис. 4.)

1. $ABCD$ — ромб.

2. $PO$ — медиана (а значит, высота) равнобедренных треугольников $BPD$ и $APC$, $\triangle POB$ и $\triangle POA$ равны. Поэтому $|AO| = |BO|$, что влечёт $|AC| = |BD|$.

3. Таким образом, $ABCD$ — ромб с равными диагоналями, т. е. квадрат.

**1.27.** На способ решения этой задачи (использование теоремы Пифагора и обратной ей) следует обратить особое внимание. Он плодотворен и в дальнейшем будет использоваться. Приведём решение одного из вариантов.

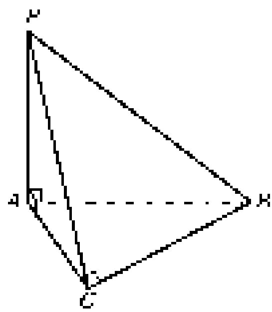


Рис.5

Пусть $\angle PAC$, $\angle PAB$, $\angle ACB$ — прямые (рис. 5). По теореме Пифагора из соответствующих треугольников

$$|PC|^2 = |AP|^2 + |AC|^2, \quad |BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2,$$
$$|AP|^2 + |AB|^2 = |PB|^2.$$

Сложив почленно первые два равенства и упростив, получаем

$$|PC|^2 + |BC|^2 = |PB|^2.$$

Это означает, что $\triangle PCB$ прямоугольный: $(PC) \perp (BC)$.

Аналогично — остальные случаи.

Отметим, что некоторые задачи к пункту 1.4 требуют много времени для полного своего решения из-за длительности обсуждения, недостаточности знаний и большого количества технических выкладок (например, задача **1.18**). Поэтому при подготовке к уроку очень важно определить, какая подготовительная (или заключительная) работа будет проделана дома, какая её часть — в классе, какую мысль, приём, метод надо показать и соответственно этому какие выбрать задачи.

## § 2. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве

Продолжается линия на связь с наглядностью и практикой.

1. Строение теорем 2.1 и 2.2 в некотором смысле одинаково. Это позволяет, разобрав одну из них, на том же уроке предложить учащимся самостоятельно разобрать другую в классе или дома. Можно оформить на доске схему доказательства этих теорем в параллельных столбцах, чтобы проиллюстрировать аналогию. Такое сопоставление — часть систематической работы по воспитанию культуры мышления учащихся. Для более полной аналогии полезно изменить доказательство теоремы 2.1 (в конце довести до противоречия с аксиомой прямой на плоскости) либо теоремы 2.2 (в конце доказать, что $\alpha = \beta$). Мы в своей практике обычно делали первое. При этом отрабатывается метод доказательства

от противного, недостаточно усвоенный в девятилетке, и сохраняется подход, заданный самими авторами учебника (когда говорим «две прямые», то подразумеваем, что они не совпадают). Кроме того, теоремы 2.3 и 2.4 можно доказывать в обратном порядке: сначала 2.4, потом 2.3.

2. Доказывая следствие из теоремы 2.2, надо обратить внимание учащихся на то, что теорема показывает ещё и способ построения четырёх точек, не лежащих одновременно ни в какой плоскости. Это даётся более подробной расшифровкой последней фразы пункта 2.2.

3. Много работы, непривычной для десятиклассника, позволяет провести пункт 2.3. Рассматривая теоремы 2.3 и 2.4, можно поступить так, как предлагается в учебнике: теорему 2.3 доказать учителю, а теорему 2.4 предложить учащимся доказать самостоятельно аналогично доказательству теоремы 2.3. Но можно провести после теоремы 2.2 беседу с учениками о том, какое множество точек, какую конфигурацию задают три точки, не лежащие на одной прямой. Обычно первый ответ: треугольник. Но когда просишь уменьшить число элементов, получаешь нужные ответы: прямая и точка вне её, две пересекающиеся прямые (да и первый ответ вполне устраивает, просто он не столь важен для теории). При таком способе решаем устно задачу: «$(AB) \cap (BC) = B$. Доказать, что $(AB) \subset (ABC)$». После этого формулируются теоремы 2.3 и 2.4 и доказываются параллельно (общий метод доказательства уже подсказан в предварительной беседе). Но конечно, большую роль для воспитания математического стиля мышления сыграла бы такая работа (её проведение зависит от уровня подготовленности класса и наличия времени): показав, что теоремы 2.3 и 2.4 можно доказать одним способом, поставить вопрос: нельзя ли было доказать теорему 2.4, ссылаясь на теорему 2.3? А наоборот?

Аналогичные вопросы будут появляться и в дальнейшем. Их значение трудно переоценивать. Ученик постепенно привыкает, что последовательность теорем, как и выбор системы аксиом, не задана раз и навсегда и может быть изменена.

4. Рассуждение, приведённое в пункте 3, может провести учитель (а можно предложить ученикам как задачу, как пространственное обобщение факта, известного из планиметрии: «Через точку можно провести в плоскости сколько угодно прямых»).

## *Задачи к* § 2

**2.1.** б) Решение этой задачи, приведённое в учебнике, является ключевым для целой серии задач на сечения. Прокомментируем два момента этого решения.

1. Предлагается лишь один из способов решения. Возможно, некоторым учителям покажется более мотивированным традиционный ход рассказа после слов: «Вот один из способов: надо найти пересечение секущей плоскости $XYZ$ и плоскости грани $APC$. Одна их общая точка $Y$

уже известна. Вот бы найти вторую, тогда для построения пересечения можно было бы воспользоваться задачей-теоремой **1.31**! Внимание! Сейчас главный момент решения. Общую точку двух плоскостей даёт нам пересечение двух прямых, каждая из которых лежит в одной из плоскостей. В данном случае это $(PA) \subset (PAC)$ и $(XY) \subset (XYZ)$. Эти прямые пересекаются, так как обе лежат в $(PAB)$ и, судя по рисунку 23 учебника, не параллельны. Пусть $T$ — общая точка $PA$ и $(XZ)$ (рис. 24 учебника). Но тогда $T$ — общая точка $(XYZ)$ и $(PAC)$. По задаче-теореме **1.10** $(XYZ) \cap (PAC) = (YT)$. Пусть $(TY) \cap (CP) = K$ (они в одной плоскости и не параллельны). Значит, по той же задаче-теореме $(XYZ) \cap (PCB) = (KX)$.

Мы построили отрезки пересечения секущей плоскости с гранями многогранника. $YKXZ$ — искомое сечение».

2. Пусть $(PA) \parallel (XZ)$. Докажем, что тогда $(KY) \parallel (AP)$. Предположим, что $(KY) \cap (AP) = T$, но $(KY) \subset (XYZ)$, $(AP) \subset (APB)$. Значит, $T$ — общая точка для $(XYZ)$ и $(APB)$. Но тогда $T \in (XZ)$, что противоречит условию $(XZ) \parallel (PA)$.

Можно заметить, что и в этом случае рассуждение практически повторяет образец рассуждения, данный ранее.

Задачи **2.1** а—г аналогичны, причём задачи **2.1** а—в — это три пространственные «ипостаси» одной задачи, а **2.1** г — некоторое их усложнение. Задача **2.1** д содержит новый момент: в сечении может получиться и треугольник, и четырёхугольник. Надо отметить, что во всех этих задачах возможен также вариант параллельности стороны сечения и ребра тетраэдра (см. комментарий к задаче **2.1** б). Но мы с учениками обычно не повторяли соответствующее рассуждение всякий раз, а говорили: «Этот случай рассматривается аналогично **2.1** б». И только в задаче **2.1** е, которая играет роль опережающей задачи, необходимо в полной мере вернуться к идеям задачи **2.1** б (случай параллельности). Слова «опережающая задача» означают в этом случае задачу, которая, вообще говоря, может быть решена с помощью теории, которую изучат впоследствии. Но сейчас из-за отсутствия таковой она является задачей на сообразительность. Такая задача очерчивает круг будущих проблем, мотивирует и стимулирует их решение.

Задачи **2.8—2.13** образуют ряд заданий прежде всего на развитие пространственного воображения учащихся. Освоению техники пространственного воображения помогают художественные образы, сравнения. Один из них указан в задаче **2.13** (но можно было сказать, что уже и в задаче **2.8**). Полезно представить себе в соответствующих случаях дверь, поворачивающуюся около вертикальной оси, проходящей через две петли; дверь в подпол, поворачивающуюся около горизонтальной оси; дверь в ледник, который строят иногда в деревнях во дворе. В таких ледниках нередко ось вращения двери наклонена к горизонту.

Полезны и другие приёмы. Разберём один из них на примере задачи **2.12** е. Фиксируем, например, середину ребра $AA_1$ — точку $M$ и середину ребра $CD$ — точку $P$. По аксиоме пересечения плоскостей плоскость сечения обязательно пересечёт ($ABC$), а значит, по крайней мере одну из прямых $AD$, $AB$, $BC$. Зададим переменную точку $K$ и станем двигать её по границе основания от точки $D$ через точки $A$ и $B$ к точке $C$. При этом получатся все возможные варианты.

После разбора основных задач задачи **2.3**—**2.6** не должны представлять трудности для ученика, а методика их объяснения — для учителя. Эти задачи развивают, усложняя, одну и ту же идею (усложнение происходит за счёт увеличения числа вариантов, некоторой непривычности вида сечения, например, отрезок и точка). Разобрав задачи на сечения, в задаче **2.6** возвращаемся к другим «мотивам», рассмотренным ранее, ибо иначе ситуация снова чревата выработкой формального, без понимания, стереотипа.

Многие учителя, возможно, изберут при прохождении § 2 такую последовательность действий: сначала на основании задачи-теоремы **1.31** решить некоторые задачи к пункту 2.1 (они как бы готовят к основной задаче **2.1**); потом — задачи **2.1**; затем по мере прохождения пунктов 2.2, 2.3 дополнительно к соответствующим задачам решать выборочно задачи из **2.8**—**2.13**; остальные задачи из **2.8**—**2.13** и из задач к пункту 2.1 — для желающих, для дополнительной и индивидуальной работы с учениками. Можно использовать такие задачи также для самостоятельных и контрольных работ.

**2.2.** Эта задача — продолжение задач **1.3**, **1.4** и др., но теперь можно доказать неправильность рисунка и по теореме 2.2 (от противного).

**2.7.** О т в е т: не следует.

**2.14.** Проведём $n + 1$-ю прямую (взяв хотя бы предварительно по точке на двух прямых). Даже если она пересекает $n$ данных прямых, на ней есть ещё точки (ибо точек на прямой бесконечно много).

**2.15.** Пусть $\alpha \cap \beta = m$, $A \in \alpha$, $A \notin m$, $B \in \beta$, $B \notin m$. Тогда ($AB$) пересекает обе плоскости. На этой прямой есть точки, не принадлежащие ни $\alpha$, ни $\beta$. Если же $\alpha$ и $\beta$ не имеют общих точек, то искомой точкой является любая точка ($AB$), отличная от $A$ и $B$.

Обобщения могут быть различными. Вот некоторые из них: «Доказать, что для двух данных плоскостей найдётся сколько угодно точек, им не принадлежащих». Или: «Дано $n$ плоскостей. Доказать, что найдётся точка (прямая), которая не лежит в этих плоскостях».

**2.16.** Здесь разбираем два варианта:

1. Все точки фигуры лежат на одной прямой.

2. Есть по крайней мере три точки фигуры, не лежащие на одной прямой.

**2.17.** В задаче **2.14** было доказано существование точек, не лежащих на $n$ прямых. Тогда через две из них и точку пересечения данных прямых можно провести пересекающиеся прямые, а через последние — искомую плоскость. Кстати, а будет ли он стоять ровно, т. е. будет ли его крышка горизонтальна?

в) «Устойчивый» в задаче **2.17** а означает «не качается». Однако на практике нас интересует, чтобы стол ещё и не опрокидывался после крена в какую-то сторону. В этом смысле каждая четвёртая ножка играет для остальных трёх роль дополнительной опоры, мешающей столу упасть в сторону четвёртой ножки.

**2.18.** г) Опережающая задача (ибо транзитивность параллельности прямых в пространстве будет доказана в § 3), но она же является продолжением линии, начатой задачами **2.3** б, **2.5** в, **2.6** (дополнительный вопрос), **2.1** б (последний абзац — см. решение). Поэтому можно начать работать над этим вопросом с любой из этих задач или оставить его до прохождения транзитивности параллельности прямых.

д) Существенно использует результат задачи **2.18** г.

**2.19.** Продолжение и некоторое развитие задачи **1.16**.

**2.20.** В задачах «б» и «в» трудно ожидать однозначного ответа. Вот, например, фрагмент беседы, проведённой в классе по поводу задачи «б»:

— Как проверить, ничего не измеряя, будет ли стол на четырёх ножках устойчив на горизонтальном полу? (Поставить его на пол и посмотреть.)

— А если это происходит на складе магазина и нет свободного места, где его поставить, и он лежит на другой мебели ножками вверх? (Предполагаемый ответ: Верёвочки, соединяющие основания противоположных ножек стола, должны пересекаться.)

## § 3. Взаимное расположение прямых в пространстве

Содержание параграфа в основном традиционное. Здесь, пользуясь случаем, можно работать над культурой мышления ученика: предлагать разные подходы, виды систематизации, сравнивать слова «определение» и «признак», давать два равносильных признака скрещивающихся прямых вместо привычного одного (в пункте 3.1). В пункте 3.2 эта работа может продолжаться (аксиома параллельных на плоскости превращается в теорему для пространства; из всех способов доказательства теоремы о транзитивности параллельности прямых выбран общий, не требующий разбора отдельных случаев). Учащиеся доказывают лемму самостоятельно, проанализировав рисунок к ней (вполне в духе педагогических идей авторов пособия).

Сделаем несколько пояснений к теоретическому тексту.

1. Чем дальше отходят ученики от фразы «не лежащие в одной плоскости», тем больше они забывают её смысл. Проходит несколько уроков, и уже нередко слышишь ответ, что точки $M$, $P$, $A$, $D$ (рис. 6) не лежат

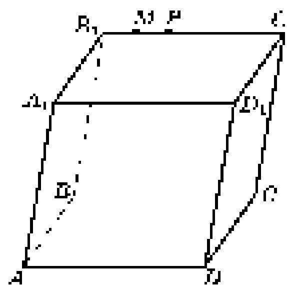


Рис. 6

в одной плоскости (действительно, ни одна из плоскостей, изображаемых гранями параллелепипеда, не содержит эти четыре точки). Поэтому, когда определение скрещивающихся прямых, выделенное в тексте особым шрифтом, используется по прошествии некоторого времени, возможны недоразумения. Конечно, в учебнике есть пояснение этой фразы (см. З а м е ч а н и е к § 2). Но оно забывается. Поэтому можно давать как определение именно это пояснение — предложение из следующего абзаца учебника: «Скрещивающиеся прямые — это такие прямые, через которые нельзя провести плоскость», что не мешает применять в нужный момент следствие из теоремы 2.2.

2. Возможно, некоторые учителя используют такой момент: в начале урока всему классу или отдельному ученику в качестве проверки знания следствия из теоремы 2.2 (заданной к этому уроку для повторения) предлагается задача: «Четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$ таковы, что $C \notin (AB)$, $D \notin (ABC)$. Через любые две из этих четырёх точек проводится прямая, через оставшиеся тоже. Доказать, что через эти прямые нельзя провести плоскость». Такая задача и проверяет повторение, и укорачивает объяснение, и сама по себе интересна, ведь таких пар три, а свойство инвариантно. А психологический выигрыш? Роль момента, когда учитель достиг соответствующего места в рассказе и ссылается на «теорему имярека», доказавшего её в классе, трудно переоценить!

3. Соответственно первый признак скрещивающихся прямых мы формулируем так: «Если две прямые содержат четыре точки, через которые нельзя провести плоскость, то эти прямые скрещиваются». В результате изучения теории ученики должны понять, что скрещивающиеся прямые наиболее общий случай взаимного положения двух прямых. Хотелось бы, чтобы слова «более общий» понимались учеником конкретно. Рассмотрим ситуацию. Имеется провод, натянутый на столбах (он изображает прямую). Ковбой стреляет из пистолета. Выстрелить параллельно проводу практически невозможно: настолько это редкий случай (считаем условно, что траектория пули в пределах задачи — прямая линия). Выстрелить так, чтобы попасть в провод, трудно, но возможно. А для того чтобы прямая полёта пули скрещивалась с прямой, содержащей провод, можно практически палить напропалую.

## *Задачи к* § 3

**3.1.** Вот, например, ответ ученика по поводу знака (?) в пункте в): точек пересечения — конечное множество. Они занимают какое-то ограниченное место на плоскости. (Учитель: «Лежат в каком-то круге».) Значит, можно провести прямую мимо этого места. (Учитель: «Мимо круга».)

Задача **3.1** важна прежде всего методом, показываемым в ней, развитием пространственного представления и интуитивного понимания непрерывности через «шевеление».

Задачи **3.2** и **3.3** — упражнения на признак скрещивающихся прямых.

Задача **3.3** готовит к задаче **3.12**.

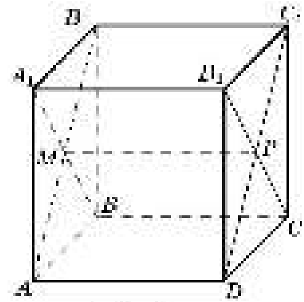


Рис.7

**3.4.** а) $A_1D_1CB$ — параллелограмм (рис. 7), $(MP) \parallel (B_1C_1)$ как его средняя линия.

б) Можно аналогично задаче а); можно, ссылаясь на неё.

**3.5.** Пусть $a$ и $b$ — скрещивающиеся, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ пересекают $b$ и параллельны $a$. Зададим плоскость α пересекающимися прямыми $b$ и $a_1$. Далее используем задачи **3.1**, **3.13**.

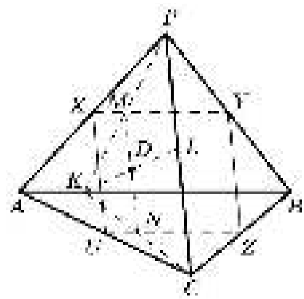


Рис.8

**3.6.** О т в е т: это параллелограмм $UXYZ$ (рис. 8), вершины которого последовательно середины сторон $AC$, $AP$, $PB$, $BC$. (Под параллелограммом имеется в виду соответствующая часть плоскости.) При решении необходимо доказать истинность двух утверждений: прямого и обратного (или противоположного).

1. Середина любого такого отрезка $KL$ принадлежит параллелограмму $UXYZ$.

2. Для любой точки $D$ параллелограмма $UXYZ$ найдётся такой отрезок $KL$ с концами на $AB$ и $CP$, что $D$ — его середина.

Но всё это полезно делать устно (без записей). Отработку решения таких задач лучше отложить до темы «Расстояния и углы», а на данный момент цель учителя лишь показать необходимость двух утверждений, помочь их сформулировать, пояснить; цель ученика — эту необходимость осознать и перевести с языка «картинки» на язык логической формулировки.

Задачу **3.9** надо рассматривать вместе с задачами **3.10**, **3.16**. Эти задачи являются хорошей пропедевтикой понятия угла между направлениями, между скрещивающимися прямыми.

Задача **3.11** готовит к задаче **3.4**.

**3.12.** Это, собственно говоря, известная планиметрическая задача об отрезках, соединяющих последовательно середины сторон четырёхугольника, «упрятанная» в тетраэдр.

В задаче **3.13** фразу «Все эти прямые параллельны» следует, очевидно, понимать так: «Каждые две параллельны».

**3.20.** В задаче возможны варианты:

$$1)\ \begin{cases} a \times c, \\ b \parallel c; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} a \parallel c, \\ b \times c; \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} a \times c, \\ b \times c, \end{cases}$$

но, естественно, пересечение не в одной точке.

Нет варианта $\begin{cases} a \parallel c, \\ b \parallel c. \end{cases}$

В дальнейшем эта задача продолжается хотя бы задачами **5.2** б, **5.10** и т. д.

**3.21.** Для скрещивающихся прямых неверно. Для пересекающихся прямых это тоже неверно. А вот для параллельных прямых это верно (лемма к теореме 3.2). Но хочется услышать обратное утверждение: «Две прямые являются параллельными, если любая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую». Учитель может выстроить соответствующий урок в таком порядке: «Лемма. Просьба к ученикам сформулировать обратное утверждение. Чем является лемма? (Свойством параллельных прямых.) А это утверждение (если оно верно)? (Признаком.) А верно ли соответствующее утверждение для скрещивающихся, пересекающихся прямых?..» У учителя появляется возможность наметить план другого изложения темы «Взаимное положение прямых» в достаточно подготовленном классе.

Задачу **3.23** можно рассматривать как подготовительную к задаче **3.2**.

## § 4. Параллельное проектирование

Практически во всех наших школьных учебниках, выходивших в свет после знаменитой «Геометрии» А. П. Киселёва, вопрос о параллельном проектировании и изображении фигур на плоскости затрагивался. Но при этом обоснование или по крайней мере пояснение свойств параллельного проектирования проводилось слишком поздно. А до этого избегались сюжеты задач, в которых требовалось изображать сложные фигуры или в которых изображались геометрические фигуры и тела задолго до объяснения, почему они так изображаются. Такую ситуацию можно было понять (но не принять): ведь для более краткого объяснения свойств параллельных проекций надо было «запастись» теорией. Авторы нашего учебника пошли по иному пути. Сразу во Введении они перечисляют простейшие правила изображения, дают обещания обосновать их и не медлят с исполнением обещаний. Уже в § 4 главы I они подробно и обоснованно об этом рассказывают. Ученик к этому времени мало знает, но всё же достаточно, чтобы понять пусть даже и более громоздкие, чем прежде, доказательства. Преимущества такой позиции очевидны: практически с самого начала изучения стереометрии учащиеся привыкают к обоснованному грамотному изображению. На первых порах хватает и умения изображать плоские фигуры при параллельном проектировании. Ведь для решения задач про многогранники на этой стадии достаточно знать, как изображаются их грани. При прохождении же теоремы про соответствующие тела специально разбирается вопрос об их изображении (см., например, пункты 15.4, 18.2, 19.5, 23.3). Задачи к § 4 проще соответствующих задач в других учебниках. Это и понятно. Ведь для нужд школьной геометрии больше и не требуется!

Учитель же, испытывающий личную симпатию к этому разделу, найдёт соответствующий материал хотя бы в книгах:

*Четверухин Н. Ф.* Стереометрические задачи на проекционном чертеже / Н. Ф. Четверухин. — М., 1952.

*Литвиненко В. Н.* Задачи на развитие пространственных представлений / В. Н. Литвиненко. — М., 1991.

*Гусев В. А.* Практикум по элементарной математике. Геометрия / В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. — М., 1992.

*Казаков П. Г.* Параллельные проекции и методы решений конструктивных задач / П. Г. Казаков. — М., 1960.

*Рассохин В. В.* Занимательные задачи по проекционному черчению / В. В. Рассохин, С. В. Розов, Н. А. Успенский. — М., 1969.

*Василевский А. Б.* Параллельные проекции и решение задач по стереометрии / А. Б. Василевский. — Минск, 1978.

Можно использовать также многочисленные руководства по черчению.

От учителя, естественно, зависит, в какой форме организовать усвоение § 4. Одна из таких форм — семинарские занятия «Параллельное проектирование». Всему классу задаётся на дом прочесть § 4. Предлагается не выучить, а разобраться в доказательстве, сформулировать вопросы. В начале занятия учитель во вступлении вводит основные понятия. Затем три докладчика доказывают свойства, отвечают на вопросы одноклассников (в основном вопросы бывают про особые случаи) и учителя (например, об изображении средней линии, высоты, биссектрисы, медианы треугольника). Ученики заново осознают, что построение сечения — это построение изображения сечения на изображении геометрического тела с помощью свойств параллельного проектирования. (Кстати, о разных смыслах задания «Построить...» в геометрии можно провести отдельный семинар по § 5.) Затем на всеобщее обсуждение выносится вопрос о параллельной проекции плоских фигур, известных ученикам. Появляется возможность межпредметных связей (например, с черчением, где правила изображения фигур были уже известны, но не обоснованы).

## § 5—6. Существование и единственность. Построения. Об аксиомах

Методологическое значение этих параграфов трудно переоценить. Учащиеся должны обязательно ознакомиться с ними. Однако, учитывая уровень знаний учеников ко времени прохождения этого материала, сделать это одномоментно невозможно. Да и в программе есть на этот счёт лишь фраза: «Построения в пространстве». Учитывая всё это, мы начинаем с получасовой беседы учителя (или сообщений учеников) на тему «Что значит в геометрии слово «построить». В этой беседе мы выделяем четыре значения этого слова: построение циркулем и линейкой на плоскости (например, серединного перпендикуляра), доказательство существования (через возможность построить), построение на конкретной пространственной заготовке (разметка) и построение изображения на изображении (сечение на изображении многогранника). Материал для этого сообщения берётся из § 5 (плюс житейский опыт учащихся). Остальное осваивается по-разному: можно дать прочесть материал всему классу для ознакомления, дать индивидуальные задания; можно вернуться к § 5 и 6 при повторении материала 10 класса или в 11 классе. Есть опыт использования материалов этих параграфов во внеклассной работе.

### *Задачи к* § 5

**5.2.** а) Пусть $a$ и $b$ — скрещивающиеся прямые, $X \notin a$, $X \notin b$.

П о с т р о е н и е.

1. $a_1$ ($a_1 \parallel a$, $X \in a_1$), $b_1$ ($b_1 \parallel b$, $X \in b_1$) ($a_1$ пересекает $b_1$. Почему?).
2. $\alpha$ ($a_1 \subset \alpha$, $b_1$).
3. $c$ ($c \subset \alpha$, $X \in c$, $c \neq a$, $c \neq b$).
4. $\beta$ ( $c \subset \beta$ , $\beta \neq \alpha$ ) — искомая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме к теореме о транзитивности параллельных прямых.

И с с л е д о в а н и е. Таких плоскостей бесконечно много. (Нередко ученики прельщаются очевидным решением: берут по точке на прямых $a$ и $b$ и через три точки проводят плоскость. Однако такая плоскость может содержать и какую-то из данных прямых.)

б) Задача перекликается с задачами **3.20**, **5.10**.

Проанализируем её: если такая прямая $c$ есть, то через неё и одну из данных прямых (прямая $a$) можно провести плоскость $\alpha$, через $c$ и другую данную прямую $b$ — плоскость $\beta$. Тогда $\alpha \cap \beta = c$. Таким образом, прямой $c$ может быть только прямая пересечения плоскостей $\alpha$ ( $a \subset \alpha$, $X \in \alpha$) и $\beta$ ($b \subset \beta$, $X \in \beta$). Заведомо ясно, что решений не более одного.

**5.1.** Обобщение может идти разными путями, но естественно рассматривать правильные пирамиды (тогда точка, равноудалённая от всех вершин, может оказаться на грани и даже вне пирамиды). В частном случае, если требовать равенство всех рёбер, то, начиная с $n = 6$, такой $n$-угольной пирамиды не существует.

Задачи **5.1**, **5.2**, **5.13**, **5.14** представляют собой хороший материал для воспитания культуры мышления ученика.

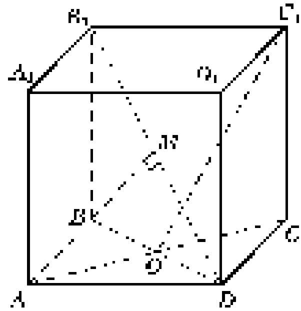


Рис.9

**5.3.** (Рис. 9.) а) $(CD_1)$ (диагональ квадрата).

б) $(C_1O)$ (медиана и высота в равнобедренном треугольнике $BC_1D$).

в) $(B_1O)$ (аналогично задаче **5.3** б).

г) Прежде чем начать вычисления, целесообразно предложить ученикам поупражнять своё пространственное воображение: как они видят этот перпендикуляр. А считать можно по-разному. Вот один из способов.

$\angle B_1BD$ — прямой. Если ребро куба равно 1, то $|BD| = \sqrt{2}$, $|B_1D| = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} BB_1M = \sqrt{2}$. Тогда $|B_1M| = 1 \cdot \cos BB_1M = \cos BB_1M = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Значит, $|B_1M| = \frac{1}{3}|B_1D|$.

Задачи **5.4** несложны. Отметим лишь, что **5.4** г — опережающая задача. Она готовит к теме «Расстояние между скрещивающимися прямыми».

* * *

Теперь можно сделать некоторые выводы.

I. Глава I называется «Основания стереометрии» и формально (так как излагает систему аксиом и первые следствия из них), и по житейскому смыслу этих слов, ибо в этой главе создаются основы, формируются методы, приёмы, подходы, которые получат дальнейшее своё развитие в процессе изучения геометрии в 10 и 11 классах.

II. Соответственно с этим есть в главе I вопросы, которые нужны преимущественно в этой главе, и поэтому они доведены здесь до логического завершения. Большинство же теорем (а тем более методов и приёмов) найдёт своё приложение и развитие в следующих главах. Поэтому учителю предстоит решить, доказательство какой теоремы, использование какого метода доводить до «логического блеска», а что оставить на дальнейшую отработку. Мы же выскажем только некоторые рекомендации.

III. Как показывает практика работы, на первых уроках геометрии зачастую приходится не столько доказывать теорию или задачи, сколько доказывать необходимость доказывать. Именно эта задача и решается при изучении Введения, § 1 и 2. Мы не добиваемся в этот момент от каждого ученика безусловного и детального знания доказательства теории или соответствующего рассуждения в задаче. (Сказанное, конечно, не означает, что работа с теорией не должна вестись. Теоремы должны быть доказаны и воспроизведены сильным учеником или фронтально. На их материале можно работать над развитием культуры мышления учащихся — см. комментарий к § 2.) Ученик после изучения § 1 и 2 должен осознавать другое: доказательность геометрии! Но он отнюдь не должен заучивать, не понимая до конца и не умея доказывать, доказательство каждого факта.

Главной же задачей при изучении § 1 и 2 является обращение к наглядному опыту ученика, раскрепощение его пространственного мышления, отработка навыков изображения на плоскости простейших пространственных фигур.

Конечно, эта работа продолжается и дальше, в частности при изучении § 3. Но к изучению § 3 требования более высокие, ведь его материал используется существенно и в этой главе, и в последующих: ученики же подготовлены и логически, и психологически лучше. Учащиеся должны хорошо понимать классификацию взаимного положения двух прямых в пространстве, использовать её в задачах (в частности, доказывая от противного), знать соответствующие признаки и уметь ориентироваться при их применении.

IV. После освоения главы I ученик смело обращается к наглядности, «картинке», модели и т. д., ощущает потребность в доказательстве, проверяющем наглядное представление, понимает идею непрерывного движения, понимает слово «построить» и т. д.

Ниже мы перечислим и кратко прокомментируем значимость на момент прохождения некоторых приёмов и методов, развиваемых в главе I.

1) *Метод доказательства от противного*. Формально ученики уже знают его. На деле некоторые доказывают, предполагая противоположное условию, а некоторые воспроизводят доказательство, но не понимают его сути: например, не знают, когда же можно сказать, что теорема доказана. При прохождении главы I этот метод надо отработать окончательно.

2) *Метод решения задач на доказательство существования*, основанный на интуитивном понимании учеником непрерывности изменения величин. Примером этого метода является в главе I решение задачи **1.1**. Это новый метод. Он существенно формируется при прохождении главы, но его формирование ещё не закончено.

3) Тесно примыкает к нему метод, известный в литературе под названием как *метод «малых шевелений»*. Примером этого метода является решение задачи **I.16**. Этот метод также новый, и над ним предстоит ещё поработать настолько, чтобы ученики стали его применять.

Можно наметить линию, последовательно идущую от задач **1.1**, **1.9** через **2.8**—**2.13** к **3.1** б, а затем к **I.16**. Задачи эти сюжетно не всегда связаны. Дело в самом факте дерзновения «шевельнуть» статичную модель. В задаче **1.9** учащимся ещё предлагается построить два сечения, пересекающиеся по данному отрезку (одно можно считать полученным из другого поворотом), в задачах **2.8**—**2.13** они уже начинают поворачивать и т. д.

4) *Построение сечений* (определение и основные идеи исполнения). Эти технические идеи должны быть усвоены при прохождении главы I.

5) *Доказательство перпендикулярности прямых с помощью теоремы*, *обратной теореме Пифагора* (в общем случае можно сказать по теореме косинусов). По сравнению с предыдущим это мелкий приём. Но на нём надо акцентировать внимание учащихся: он будет необходим в дальнейшем.

6) Кроме этого, отметим некоторые особенности стиля задач учебника, которые при первом чтении могут показаться непривычными для школьного курса геометрии, но полезны и отвечают современным требованиям методики: приближение задач к практике (постановка задач, вариативность ответа, задачи с избыточными и неполными данными, задачи, где нет решения), постоянное «нарушение стандарта мышления», возникающего при решении подряд нескольких задач на один приём, одну тему, опережающие задачи и т. д.

Особого внимания заслуживает предложение обобщить, часто встречающееся в задачах. При первых встречах с такими задачами учитель поясняет, что здесь это слово понимается узко и чётко: придумать такое (истинное) утверждение, для которого рассмотренная задача стала бы частным случаем. Отсюда следует и техника такого обобщения: отбрасывание какого-либо условия частной задачи или замена его на более общее.

7) Особого разговора заслуживает отношение авторов к геометрическим *задачам на вычисление*. Как может заметить читатель, такие задачи практически отсутствуют. Они появляются только там, где, работая с числами, можно получить результат, геометрически важный (например, в задаче **1.1**).

## *План прохождения главы* I

| № урока | Тема и её содержание | Повторение | Примечания |
|---|---|---|---|
| 1 | Вводная беседа. Предмет и метод геометрии. Знакомство с геометрическими телами и правилами их изображения | Свойства расстояний на плоскости | **Наглядность:** модели геометрических тел, изображение многогранников на плакатах (полезно эти плакаты оставить в классе на длительное время) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2, 3 | Аксиомы стереометрии | Теоретико-множественные обозначения. Аксиоматичность (но не аксиомы) планиметрии. Определение полуплоскости | |
| 4 | Упражнения. Сечение фигуры плоскостью | | См. комментарий к § 1 |
| 5 | Прямая, определяемая двумя точками | Треугольники, их равенство и подобие. Четырёхугольники, их виды, признаки | Можно, сопоставляя, пройти две теоремы на одном уроке |
| 6 | Плоскость, определяемая тремя точками Следствие | | |
| 7 | Плоскости, проходящие через прямую | Теорема косинусов и теорема Пифагора | См. комментарий к § 2 |
| 8 | Упражнения. Самостоятельная работа | | |
| 9, 10 | Взаимное положение двух прямых в пространстве | | См. комментарий к § 3 |
| 11 | Проверочная работа | | Включить и материал на повторение |
| 12 | Анализ работы. Понятие о равенстве и подобии в пространстве | Взаимное положение прямых в пространстве. | |
| 13 | Беседа «Что значит слово «построить» в геометрии». Понятие о параллельном проектировании | Что значит слово «построить» в планиметрии? | См. комментарий к § 5, 6 |
| 14 | Упражнения | | |
| 15 | Контрольная работа | | |

*Комментарий к плану*. Предлагаемый план допускает (исходя из опыта работы учителей) многие варианты. Одни учителя добавляют несколько часов (в том числе и из алгебры), знакомя учащихся с элементарными сведениями из теории множеств и её символикой. Другие увеличивают число уроков на прохождение главы I, заменяя урок 11 тремя уроками, но подробно разбирая на этих уроках и параллельное проектирование. Возможны и другие варианты.

## *Из дидактического материала к главе* I

### ***Самостоятельная работа*** (на 15 мин, урок № 8)

1. Два квадрата $ABCD$ и $ADEF$ (вершины указаны в порядке обхода) не лежат в одной плоскости. Плоскость $\alpha$ имеет с этой фигурой общую точку $C$. Нарисуйте сечение данной фигуры плоскостью $\alpha$, если, кроме того, $\alpha$ проходит через

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| точку $M$ внутри отрезка $AB$ и точку $P$ внутри отрезка $AF$.<br>2. Как изменится сечение, если точка $M$ совпадает с точкой $B$? | точку $P$ внутри отрезка $BC$ и точку $M$ внутри отрезка $DE$.<br>2. Как изменится сечение, если точка $P$ внутри отрезка $AD$? |

Пояснение. На первый вопрос желательно получить краткое объяснение или рисунок, из которого ясно, как строилось сечение; на второй вопрос только рисунок.

### ***Проверочная работа*** (на один урок, урок № 11)

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| 1. Прямые $a$ и $b$ параллельны. Точка $O$ не лежит на этих прямых. Плоскость $\alpha$ проходит через $O$ и $a$, плоскость $\beta$ проходит через $O$ и $b$. Пусть эти плоскости пересекаются по прямой $c$. Может ли $c$ пересекать $a$? | 1. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по прямой $p$. Точка $A$ лежит в плоскости $\alpha$, точка $B$ — в плоскости $\beta$, причём ни одна из них не лежит на прямой $p$. Каково взаимное положение $(AB)$ и $p$? |

2. Нарисуйте правильную треугольную призму. Какими могут быть её сечения плоскостью, проходящей через

| | |
|---|---|
| середины двух боковых рёбер? | середины двух рёбер одного основания? |

Нарисуйте эти сечения, попытайтесь обосновать любой из случаев, который вы предлагаете.

### ***Зачётная контрольная работа*** (на один урок, урок № 15)

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| 1. $PABCD$ — четырёхугольная пирамида. $K$ — точка внутри ребра $PD$. Каково взаимное положение $(AK)$ и $(PC)$? | 1. Основание пирамиды $MEFKL$ — трапеция $EFKL$ $((EF) \parallel (KL))$. $A$ — точка внутри ребра $LM$, но не ниже его середины. $B$ — точка внутри ребра |

2. Нарисуйте сечение пирамиды $PABCD$ (см. задание 1) плоскостью $ABK$.

$MK$, но не выше его середины. Каково взаимное положение $(AB)$ и $(MF)$? Ответ обоснуйте.

2. Нарисуйте сечение пирамиды $MEFKL$ плоскостью $ABE$ (см. задание 1).

Пояснение. Там, где рисунок объясняет построение, его достаточно. В остальных случаях надо получить дополнительное объяснение.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра $a$. $O$ — точка пересечения диагоналей грани $ABCD$. Найдите $|B_1O|$.

3. Основание пирамиды $PABCD$ — квадрат $ABCD$, причём $(BP) \perp (AB)$, $(BP) \perp (BC)$, $|BP| = |AB|$. $M$ — точка пересечения $BD$ и $AC$. Найдите $|BP|$, если $|PM| = m$.

# ГЛАВА II. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей — наиболее часто встречающиеся в геометрии отношения двух объектов. Ученик, хорошо освоивший главу II, создаёт себе солидную базу для овладения почти всем последующим материалом геометрии 10—11 классов, и, напротив, огрехи в освоении этой главы будут сказываться очень долго в понимании других тем. Такое привилегированное положение этих отношений в школьной геометрии есть лишь отражение их значимости в окружающей жизни, прежде всего в строительстве, архитектуре и т. д. Многие учителя считают, будто ученикам в этой теме всё очевидно. Однако опыт показывает: это не так, и поэтому в учебнике параллельности и перпендикулярности уделяется большое внимание.

Содержание главы II традиционно в большей части, хотя есть и своеобразные моменты. И не только в содержании. Всё это будет обсуждаться ниже. Но прежде хотелось бы поговорить об одной популярной методической проблеме, непосредственно связанной с материалом этой главы: «Где и как давать понятие угла между скрещивающимися прямыми?»

В основном есть две точки зрения на этот вопрос.

Первая точка зрения. Надо давать это понятие до перпендикулярности прямой и плоскости. Тогда легче, проще, короче доказываются теоремы, решаются задачи. Теория получается сразу логически более общей, нет необходимости переучивать учащихся. (В I полугодии говорим: «Пусть $a \perp \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap \alpha = A$, $A \notin b$, тогда $b \not\perp a$», а во II полугодии при тех же условиях утверждаем, что $b \perp a$. Ситуация напоминает решение квадратного уравнения: в 9 классе при $D < 0$ часто говорят, что корней нет, а в 11 классе выясняется, что корни есть.)

Вторая точка зрения. Да, всё это так. Но ведь угол между скрещивающимися прямыми — это не угол в том смысле, который ученик уяснил в предыдущих классах. Это не геометрическая фигура, а некая величина. Такое понятие угла в начале 10 класса трудно для усвоения, введение его здесь несвоевременно, ибо уводит ученика от геометрии в область чисел, отодвигая время прохождения геометрических разделов школьной геометрии. Лучше пожертвовать в некоторых случаях простотой в доказательстве теорем и решении задач, но сохранить «геометричность», возможность обращаться к пространственному представлению и мышлению.

Учебник разделяет вторую точку зрения. Но из-за этого, например, теорема 7.3 и решение некоторых задач становятся очень громоздкими. Опыт показал удобство компромиссного варианта, при котором:

1. Понятие «угол между скрещивающимися прямыми» вводилось (как и намечается) при прохождении главы III.

2. Но на первых уроках по главе II (не противореча её названию) вводилось определение: «Пусть $a$ и $b$ — скрещивающиеся прямые, $M$ — произвольная точка пространства, им не принадлежащая. Проведём через точку $M$ $a' \parallel a$, $b' \parallel b$. Если $a' \perp b'$, то прямые $a$ и $b$ называются перпендикулярными». (Может, кому-нибудь понравится определение: «Две скрещивающиеся прямые называются перпендикулярными, если существуют соответственно параллельные им пересекающиеся прямые $a$ и $b$, которые перпендикулярны».)

Для обоснования корректности определения до него доказывалась лемма:

$$\left.\begin{array}{l} m \parallel m_1 \\ p \parallel p_1 \\ m \perp p \\ m_1 \times p_1 \end{array}\right| \Rightarrow m_1 \perp p_1 \quad \text{(доказывалась аналогично лемме 14.1).} \qquad (1)$$

Символ × означает для прямых и плоскостей, что они пересекаются.

Лемма позволяет сделать вывод о независимости перпендикулярности скрещивающихся прямых от положения точки $M$. (Из леммы можно вывести, что точка $M$ может быть даже на одной из данных прямых.) Конечно, не забывалась и связь с практикой: рассказывалось, что из соображений надёжности и безопасности рекомендуется проводить скрещивающиеся перпендикулярные высоковольтные линии, рыть скрещивающиеся перпендикулярные тоннели.

Эти рассуждения занимали примерно урок. Но выигрыш несомненен: большая последующая экономия времени, упрощение рассуждений, никакого логического «прорыва» (нет необходимости говорить об угле между лучами), пропедевтика доказательства леммы 14.1. Поэтому в дальнейшем при изложении некоторых вопросов будут даны два варианта: первый — с помощью определения перпендикулярных скрещивающихся прямых и второй — без этого определения.

## § 7. Перпендикулярность прямой и плоскости

В небольшом пункте 7.1 вводятся фактически пять терминов и доказываются две теоремы, не считая некоторых обозначений и замечаний. Их изобилие создаёт трудности при усвоении. Поэтому, может быть, полезно подчеркнуть аналогию соответствующих утверждений для плоскости и пространства. Вот естественный приём: классу задаётся на дом повторить (вспомнить) всё про перпендикуляр и наклонные на плоскости. При проверке домашнего задания на следующем уроке доска делится на две части. На одной из них с помощью учеников выписывается план ответа на вопрос: «Что мы знаем о перпендикуляре и наклонных на плоскости?» Сразу же возникает проблема: «Истинны ли эти утверждения в пространстве?», которая и разрешается по естественно получившемуся (для плоскости) плану как серия задач на доказательство. Обычно в таких случаях даже остаются заделы на следующие уроки (например: «Что в пространстве аналогично серединному перпендикуляру на плоскости?»).

Пункт 7.3. В признаке перпендикулярности прямой и плоскости из того, что прямая $a$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, следует, в частности, что она пересекает плоскость, в которой они лежат (хотя формалист потребовал бы здесь доказательства факта, что $a$ не лежит в плоскости). Но если кто-то изберёт путь через определение скрещивающихся перпендикулярных прямых, то тогда необходимо доказать предварительную лемму: «Если прямая $a$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости $\alpha$, то $a$ и $\alpha$ пересекаются» (что можно проделать хотя бы с помощью леммы (1) и леммы 3.1 из учебника от противного). Доказательство самой теоремы можно провести сразу в общем случае.

Экономно, хорошо, логично разрешён в учебнике вопрос о построении плоскости, перпендикулярной данной прямой, и прямой, перпендикулярной данной плоскости. Как уже отмечалось выше (см. комментарий к главе I), это некие теоремы существования. Поставив проблему перед учениками (кстати, запланированную в пункте 7.1): «Откуда мы знаем, что существуют соответствующие прямая и плоскость?», намечая пути её разрешения, разрешая её, разбирая варианты (при всём этом сталкивая мнения учеников), учитель внесёт большой вклад в развитие культуры мышления учащихся.

Хотелось бы только изменить формулировку теоремы 7.3 (о плоскости перпендикуляров). Сформулируем её так: «Прямые, перпендикулярные данной прямой в данной её точке, лежат в плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярной данной прямой, и покрывают эту плоскость». Такая формулировка длинновата, но удобна при дальнейшем использовании.

## *Задачи к* § 7

**7.1.** Показывает очередное применение теоремы, обратной теореме Пифагора. Однако интерес её состоит в разборе ещё одной «ипостаси» непрерывности. В данной задаче это звучит так: «Если сколь угодно «близкая» к $b$ прямая образует с $(AD)$ прямой угол, то и сама $b$ также будет образовывать с $(AD)$ прямой угол». Эта идея тщательно разбирается и находит дальнейшее применение (хотя бы в задаче **7.27**, в доказательстве теоремы косинусов для трёхгранного угла — последний случай).

**7.2.** При её решении можно применить методы, показанные в задаче **7.1**. Но можно провести через $D$ в $\alpha$ прямую $m \parallel a$. Тогда из того, что

$a \perp (ABD)$, следует, что и $m \perp (ABD)$. Значит, $m \perp (AD)$. В итоге $(AD) \perp \alpha$ по признаку. Отметим, что если введено понятие перпендикулярных скрещивающихся прямых, то $m$ проводить не надо. Доказательство сокращается.

**7.3.** Эта задача достаточно известна. Хочется лишь отметить её многочисленное использование в темах «Углы и расстояния», «Описанные и вписанные шары». Многие авторы с помощью этой задачи доказывают существование прямой, перпендикулярной плоскости.

**7.4.** И эти задачи хорошо известны. В пунктах «в»—«е» кажется предпочтительным такой ход мысли: сначала установить существование таких точек, используя непрерывность, симметричность, а уже потом (насколько позволит учебное время) после вычислений указать (доказать), где же они.

Работа, начатая в задаче **7.4** а, б, продолжается в задачах **7.12**, **7.24** и др.

**7.5.** Простая, но можно углубить её вопросом: «Заполняют ли эти прямые такую плоскость?» Тогда задача служит пропедевтикой определения перпендикулярных плоскостей. Продолжает (техникой доказательства) задачу **3.5**.

**7.6.** При желании учитель может поставить обратную задачу и поговорить о возможности дать другое определение правильной пирамиды (равносильное данному во введении).

**7.7.** Доказывается с помощью задачи **7.6**. Очень важная задача! Её идеи и результат используются в дальнейшем цепочкой задач: **7.9** ж; **7.18** б; **9.6** в; **11.5** и др.

**7.8.** а) $\triangle PDB$ — искомое сечение (рис. 10).

б) $M$ — медиана $\triangle PDB$ (рис. 10), $QM_1 \parallel DM$, $M_1C_1 \parallel MC$, $(C_1Q) \cap (AB) = A_1$, $\triangle A_1M_1C_1$ — искомое сечение.

в) Аналогично «а».

г) Сводится к «а».

д) $F$ — середина $BP$ (рис. 11), $KF_1 \parallel CF$, $A_1F_1 \parallel AF$, $\triangle A_1F_1K$ — искомое сечение.

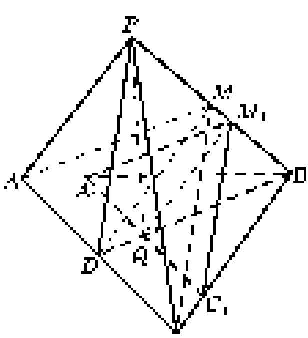


Рис. 10

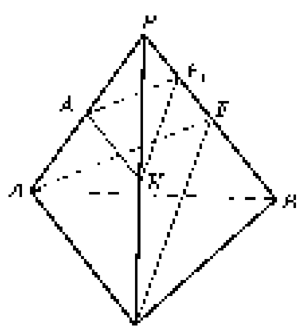


Рис. 11

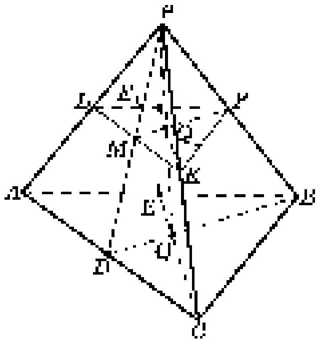


Рис. 12

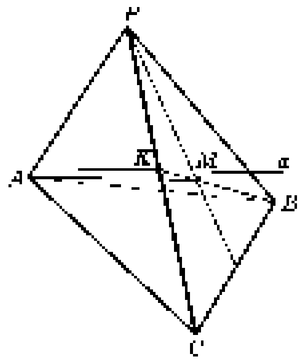


Рис. 13

е) $Q \in CE$ (рис. 12), $PE$. $KE_1 \parallel CE$, $KE_1 \cap PQ = Q_1$, $Q \in BD$, $Q_1F \parallel BD$, $E_1 \in FL$, $FLK$ — искомое сечение.

ж) О т в е т: отрезок $PC$ (рис. 13).

Поясним ответ. $M$ — центр грани $PBC$, $AM \perp PBC$, $a$ ($a \parallel AM$, $K \in a$), тогда $a \perp (PBC)$; пересекающиеся прямые $a$ и $PC$ задают плоскость, перпендикулярную $BK$ в точке $K$.

Заметим, что:

1) задача «а» является основой для решения остальных задач под этим номером;

2) задачи «а»—«е» достаточно связаны друг с другом, а «ж» (в традициях авторов) нарушает создаваемый стереотип;

3) многие задачи из **7.8** могут служить некоторой пропедевтикой к теме «Параллельность в пространстве». Более того, при желании можно вернуться к этому номеру после прохождения § 10 и проанализировать решение задачи с новых позиций.

**7.9.** Задачи просты и полезны. Отметим лишь:

1. «а», «б», «в» образуют одну серию задач (полезно сопоставить их друг с другом); «г», «д», «е» — другую серию; «ж» выбивается из этих серий, но продолжает цепочку, начатую задачей **7.7**.

2. Доказательство того, что сечение искомое, во многих случаях проводится проще с помощью определения перпендикулярных скрещивающихся прямых.

**7.10.** В общем случае два соответствующих круга. Но может быть и один круг, если треугольники равнобедренные с общим основанием.

**7.12.** Как уже указывалось, эта задача — звено в цепи задач, начатой задачей **7.4** и продолженной задачей **7.24** (поэтому надо учесть комментарий к этим задачам). Но геометрически важен новый момент: если при обобщении убрать равенство углов между наклонными, может получиться, что $O$ окажется на стороне, внутри или вне соответствующего треугольника (многоугольника при возможном обобщении).

**7.13.** Можно использовать идею задачи **7.29**.

**7.14.** Здесь интересен разбор вариантов (*A* и *C* в одном полупространстве относительно α, в разных полупространствах). При составлении обратных задач полезно поговорить о том, сколько данных задачи определяют все остальные элементы.

**7.16.** Четвёртая задача, как всегда, несколько выбивается из общего ряда, но все четыре объединяет, в частности, использование второго свойства параллельных проекций и то, что основание перпендикуляра принадлежит высоте соответствующего треугольника. К этой задаче можно вернуться при прохождении § 11.

**7.17.** В этой задаче авторов больше интересует положение основания перпендикуляра относительно треугольника (на стороне, вне треугольника, внутри, на высоте и т. д.), хотя можно и точно рассчитать, куда попадает основание перпендикуляра, воспользовавшись теоремой косинусов, теоремой о том, что в прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, делит последнюю на отрезки, квадраты длин которых относятся как длины прилежащих катетов, и т. д.

**7.18.** Хороший набор тренировочных задач на развитие пространственного воображения, на повторение теоремы Пифагора, подобия и т. д.

**7.19.** В этих задачах числовые данные определяют геометрическую конфигурацию, но чертёж во всех случаях, кроме тех, когда конфигурация не существует, имеет такой вид, как на рисунке 14 (или аналогичный ему), и проекция точки *P* (*P*′) всегда лежит на прямой *BD*. Однако более точное её положение (внутри *BD*, *P*′ = *D*, *P*′ = *B*, *P*′ — вне треугольника на луче *BD* или на луче *DB*) зависит от того, каков угол *PDB* или *PBD* (что можно выяснить, например, по теореме косинусов).

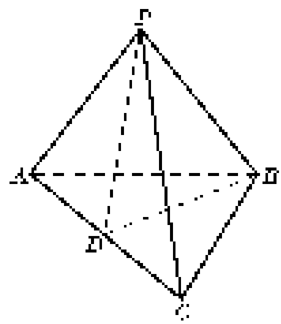


Рис. 14

**7.20.** Вычисления здесь проще, чем в задаче **7.19**, а идеи аналогичны. Поэтому, возможно, учитель выберет и такой путь: задача **7.20** подробно решается в классе, после этого задача **7.19** (с предварительным выяснением некоторых моментов) задаётся на дом.

**7.21.** Эта задача носит ярко выраженный опережающий характер. Ясно, что перпендикуляры к плоскости α из точек *B*, $D_1$, $A_1$, *A* параллельны ($B_1D$). Однако для нахождения оснований перпендикуляров знаний десятиклассников на этот момент не хватает. Необходимо забежать вперёд. На это и рассчитана задача. Насколько и куда забежать (и стоит ли вообще это делать) — дело учителя. Можно, учитывая, что впереди § 9, вспомнить задачу **7.7** и опередить параллельность плоскостей. (Действительно, α и ($BC_1D$) не имеют общих точек (от противного). Значит, перпендикуляры, проведённые из точек $B_1$, $C_1$, $A_1$, равны перпендикуляру, опущенному из центра $BC_1A_1$ (от противного), и параллельны ему. Отсюда — построение и т. д.) А можно предвосхитить симметричность и, ссылаясь на интуитивное пока понимание учащихся, сделать анализ: построить куб, симметричный данному относительно α; заметить, что отрезки, соединяющие вершину куба и её образ, делятся плоскостью α пополам; отсюда — построение. Возможны и другие решения (см. задачу **11.5** в).

**7.22.** Задача интересна тем, что при всей очевидности ответа обосновать его логически полно не такая уж и лёгкая работа. Вот один из вариантов такого обоснования.

С л у ч а й I. Точки $X$ и $Y$ движутся в одном направлении. Опустим перпендикуляр из $A$ на $BC$, обозначим его основание $D$ и станем следить за точкой $Z$, двигающейся из точки $D$ с той же скоростью и в том же направлении.

Попытки найти «хорошее» решение на стандартном пути (используя теоремы косинусов и синусов) не увенчались у нас успехом. Оказалось удобнее использовать тангенсы.

Возможны три варианта:

1) $D = C$ или $D = B$ (на рис. 15 $D = C$);

$$\operatorname{tg} XAY = \frac{|XY|}{|AY|} < \frac{|XY|}{|AC|} = \operatorname{tg} BAC \text{ (угол убывает).}$$

2) $D$ — внутри отрезка $BC$ (рис. 16). Тогда $\angle XAY$ убывает как сумма двух убывающих углов.

3) $D$ — вне отрезка $BC$ (рис. 17), т. е. $\angle ACB$ или $\angle ABC$ тупой:

$$\operatorname{tg} XAY = \operatorname{tg}(\angle XAZ - \angle YAZ) = \frac{\operatorname{tg} XAZ - \operatorname{tg} YAZ}{1 + \operatorname{tg} XAZ \cdot \operatorname{tg} YAZ} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{|XY| \cdot |AZ|}{|AZ|^2 + |XZ| \cdot |YZ|}.$$

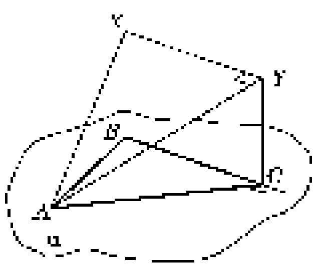



Рис. 15

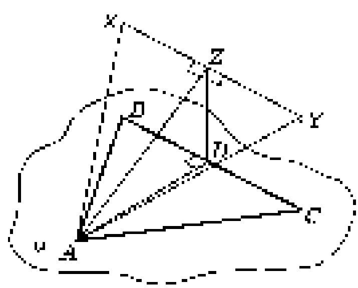



Рис. 16

В последнем выражении все длины постоянные, кроме $|ZA|$, которая возрастает, но в знаменателе степень $|AZ|$ выше. Значит, дробь стремится к нулю (для большей убедительности можно поделить и числитель, и знаменатель на $|AZ|^2$). Но это не означает, что дробь монотонно убывает. Найти же в этом случае наибольшее значение представляется возможным с помощью производной. Ответ геометрически интересен: наибольшее значение достигается при $|AZ| = \sqrt{|BD| \cdot |CD|}$. Вопрос задачи можно переделать так: «Существует ли момент времени, когда $XY$ виден из $A$ под наибольшим (наименьшим) углом?»

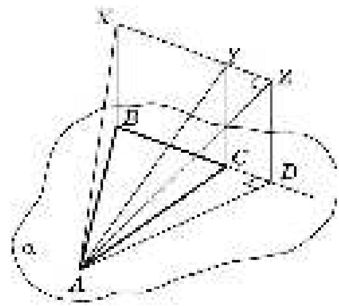


Рис. 17

С л у ч а й II. Точки $X$ и $Y$ движутся в разных направлениях (рис. 18). Тогда $XY \cap BC = M$, где $M$ — середина $BC$:

$$\cos XAM = \frac{|AM|^2 + |AX|^2 - |XM|^2}{2|AX| \cdot |AM|} =$$

$$= \frac{|AM|^2 + |AB|^2 + |BX|^2 - |XM|^2}{2|AX| \cdot |AM|} =$$

$$= \frac{|AM|^2 + |AB|^2 - |BM|^2}{2|AX| \cdot |AM|}.$$

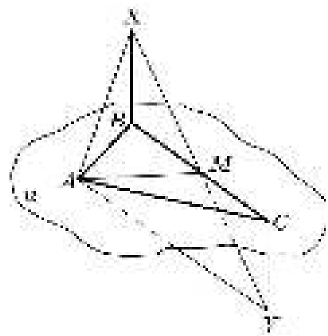


Рис. 18

В последнем выражении меняется только $AX$ (возрастает). Значит, $\angle XAM$ и $\angle XAY$ возрастают. Отсюда ясны и ответы.

**7.24.** Продолжение темы, начатой задачами **7.4** а, б (особенно «г»), представляет набор опережающих задач к теме «Углы и расстояния». Для того чтобы доказать, например, что $|XD|$ — расстояние от $X$ до стороны $AC$ (рис. 19), доказываем сначала, что $(XDB) \perp (AC)$. Дальнейшее ясно. Обобщение зависит от возможностей класса. Можно $\triangle ABC$ обобщить до правильного многоугольника (сравните с задачей **7.4** б), а можно и до многоугольника, около которого можно описать (в который можно вписать) окружность. Последнее может служить пропедевтикой свойств определённого вида пирамид.

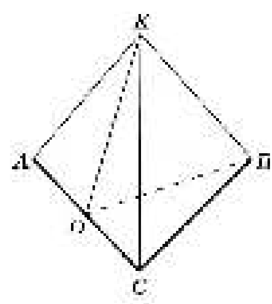


Рис. 19

**7.25.** Используется выражение медианы треугольника через его стороны (рис. 20).

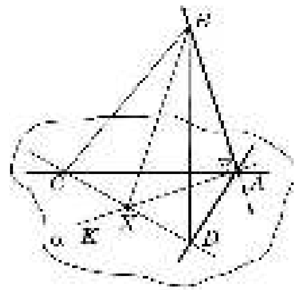



Рис. 20

Из $\triangle BCD$

$$|BX|^2 = \frac{2|BC|^2 + 2|BD|^2 - |CD|^2}{4}.$$

Из $\triangle ACD$

$$|AX|^2 = \frac{2|AC|^2 + 2|AD|^2 - |CD|^2}{4},$$

$$|BX|^2 - |AX|^2 = \ldots = |AB|^2,$$

т. е. $\triangle ABX$ прямоугольный, что и требовалось доказать.

**7.26.** Это известное (по учебнику «Геометрия. Часть II» А. П. Киселёва) доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости, основанное на переборе последовательности пар равных треугольников.

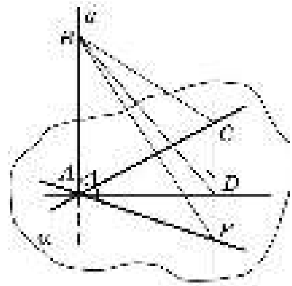



Рис. 21

**7.27.** Пусть $\angle CAD = \angle FAD$ (рис. 21). Проведём $CF \perp AD$ через $D$. $\triangle ACF$, $\triangle BCF$ — равнобедренные, $\triangle ABF$ — прямоугольный.

$$|BA|^2 = |BF|^2 - |AF|^2, \quad |AD|^2 = |AF|^2 - |FD|^2,$$
$$|BF|^2 - |FD|^2 = |BD|^2.$$

Сложив эти равенства, получаем $|BA|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$, что и означает перпендикулярность $AB$ и $AD$.

Рассуждая аналогично, докажем, что $a$ перпендикулярна прямым, содержащим биссектрисы углов $CAD$, $DAF$ и т. д.

Важно подчеркнуть, что такие прямые заполняют собой почти всю плоскость (кроме тех прямых, которые проходят через $A$, не содержат никакую из биссектрис таких углов, но сколь угодно близко к себе имеют такую биссектрису; для таких прямых проводим рассуждение, аналогичное проведённому в конце решения задачи **7.1**).

Таким образом, имея возможность доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости по крайней мере четырьмя способами (не считая ещё и способа с использованием перпендикулярности скрещивающихся прямых), учитель может организовать семинар, посвящённый этой теме. В классе организуется 4—5 групп. Каждой группе (а может, и отдельному ученику) заранее даётся задание: доказать теорему тем или иным способом. К соответствующему сроку эти задания проверяются, даются указания. На двухурочном семинаре доклады групп обсуждаются, сравниваются, оцениваются особенно теми ребятами, которые не вошли в группы. В хорошо подготовленном классе можно организовать групповую исследовательскую работу прямо на уроке. Но в этом случае полезно поделить на группы весь класс (можно даже дать параллельно одно задание; в таком случае одна из групп доказывает у доски, другая оппонирует — по жребию), дать каждой группе задание со сравнительно подробным указанием и иметь резерв времени (двух часов может не хватить).

**7.29.** Является некоторым обобщением задачи **7.28**, но и сама подвергается обобщению (например, в задаче **7.13**).

**7.30.** Хороша применением определения и признака перпендикулярности прямой и плоскости в сочетании.

**7.32.** Это линия пересечения β (β $\perp$ $AB$, $B \in$ β) и α.

**7.33.** Сначала докажем, что построенные плоскости пересекаются, а потом уже и свойство прямой пересечения плоскостей. Опять-таки отметим более короткое доказательство через перпендикулярные скрещивающиеся прямые.

**7.34.** Эту задачу можно поставить в цепочку с задачами **11.2**, **11.10** и др. (на такого вида параллелепипед).

**7.35.** Отметим аналогию рассуждений с задачей **7.7**.

**7.37.** Доказывается с помощью задачи **7.42**. Для других пирамид (например, с невыпуклым основанием) это утверждение неверно (рис. 22).

**7.38.** 1. Доказательство опирается на теорему, обратную теореме Пифагора.

2. Не будет (от противного).

3. Вообще говоря, не будет.

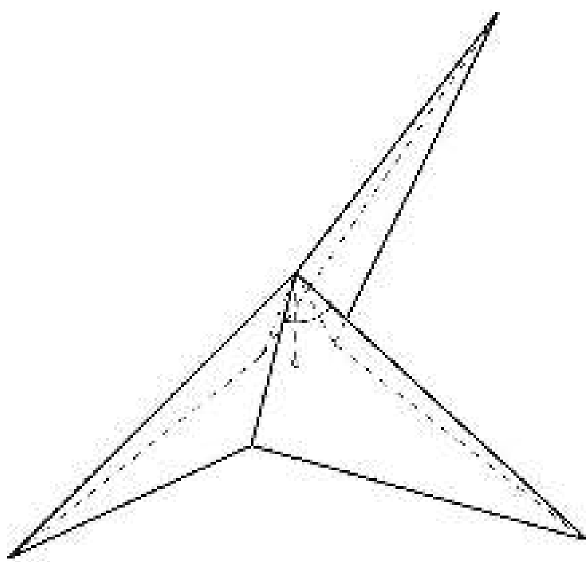


Рис. 22

При желании учитель может поработать над развитием логического мышления учащихся, сравнивая слова «не будет» в ответах на второй и третий вопросы.

**7.39.** Предложите ученикам наглядности ради поприкладывать друг к другу два пятака (соответствующим образом). Задача эта продолжается в задаче **8.16** и т. д.

**7.40.** Ответ громоздок.

1. $a \times b$ — такая плоскость существует, если $a \perp b$.

2. $a \parallel b$ — такой плоскости не существует.

3. $a$ и $b$ — скрещивающиеся прямые — такая плоскость существует, если найдётся $b'$ ($b' \parallel b$, $b' \times a$, $b' \parallel a$).

Конечно, работа, подводящая к третьей части ответа, готовит к понятию угла между прямыми в пространстве.

Если в начале темы введено определение перпендикулярных скрещивающихся прямых, то ответ прост (и его обоснование тоже): «Если эти прямые взаимно перпендикулярны».

**7.41.** При обобщении полезно вспомнить задачу **7.4** а, б.

**7.42.** Решается теми же методами, что и задача **7.22**.

Ответ: угол $BXC$ при удалении $X$ от $A$ уменьшается. Если треугольник $ABC$ не будет равнобедренным, полученный результат не изменится.

**7.43.** Эта задача — пропедевтика к теме «Описанные шары». Именно в этом направлении может идти обобщение.

**7.44.** Подчеркнём, что решение лучше проводить без исследования функции с помощью производной.

## § 8. Перпендикулярность плоскостей

Пожалуй, ни один из разделов школьной программы не оставался столь неизменным по набору изучаемых в нём фактов и не подвергался столь многочисленным изменениям в методике изложения. Изложение этого материала в учебнике существенно опирается на связь с практикой, на наглядные представления учащихся.

Приведём примерный конспект урока на тему «Определение и свойства взаимно перпендикулярных плоскостей» (2 ч).

К этим урокам ученикам задаются для повторения: определение и признак перпендикулярности прямой и плоскости, связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости (см. пункты 7.1, 7.3, 7.5) и задача **7.5**.

I. При проверке домашнего задания задача **7.5** готовится у доски, а теоремы (доказанные с помощью определения перпендикулярных скрещивающихся прямых) опрашиваются с места. При решении задачи **7.5** естественно возникает вопрос: заполняют ли эти перпендикулярные прямые всю другую плоскость? А в связи с этим ещё один вопрос: как назвать такую плоскость? В результате вырабатывается определение: «Если через каждую точку некоторой прямой $a$, не перпендикулярной данной плоскости $\alpha$, провести прямые, перпендикулярные $\alpha$, то плоскость, заполняемая этими прямыми, называется перпендикулярной $\alpha$». Однако же определение явно неудобно. Во-первых, в нём есть несущественные детали (прямая $a$); во-вторых, интуитивно ясно, что не только $\beta$ перпендикулярна $\alpha$, но и наоборот. Всё это выделение существенных и несущественных условий определения и окончательное определение (см. пункт 8.1) осуществляются в беседе с учениками, преимущественно с отвечавшими до этого задачу и теоремы. На этом заканчивается выработка определения и формулируется тема урока.

II. Работа с определением начинается с того, что ученики приводят примеры (из окружающей обстановки и на моделях) перпендикулярных и неперпендикулярных плоскостей. Формулируется определение взаимно неперпендикулярных плоскостей («Две плоскости не перпендикулярны, если существует такая точка в одной из них, что через неё нельзя провести прямую, перпендикулярную другой плоскости, лежащую в первой плоскости». Или короче: «...если перпендикуляр к одной из плоскостей проходит через точку другой плоскости, но не лежит в этой другой плоскости»). Например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Докажите, что $(A_1BC) \not\perp (ABC)$. Действительно, $(AA_1) \perp (ABC)$, но $(AA_1) \not\subset (A_1BC)$. Значит, $(A_1BC) \not\perp (ABC)$.

III. Но, решив эту задачу, мы одновременно решили и другую: какими должны быть плоскости $\alpha$ и $\beta$, чтобы прямая, перпендикулярная $\alpha$ и имеющая общую точку с $\beta$, лежала бы в $\beta$?

Естественным образом формулируется и доказывается учащимися первое свойство перпендикулярных плоскостей. (Кстати, учитель не упускает возможность спросить: какие объекты обладают этим свойством, как это утверждение можно назвать с помощью слова «признак»?) Учащимся предлагается сформулировать утверждения, обратные доказанному. Одно из таких утверждений «Если прямая лежит в одной из перпендикулярных плоскостей, то она перпендикулярна другой плоскости» неверно (приводится контрпример). Другое — первый признак перпендикулярности плоскостей — будет доказано позднее.

IV. Решение задач на пройденный материал. В качестве первой (устной) задачи предлагается первое свойство перпендикулярных плоскостей (пункт 8.2) (учащимся говорится сначала, что это задача, а потом уже предлагается определить, что это было: свойство или признак). Далее предлагается сравнить свойства 1 и 2.

В качестве второй (письменной) задачи даётся теорема 8.2 (с ней проводится такая же работа, как с первой задачей). При нехватке времени вторая задача решается устно.

V. Домашнее задание. 1) Задачи, решённые в классе, — это свойство 1 и теорема 8.2 в учебнике. Дома нужно выучить их и свойство 2 по учебнику и коротко (символами) записать конспект. 2) Повторить пункты 7.6, 7.7. 3) Решить задачи **8.6**, **7.18** ж, з, и.

VI. В заключение урока учащимся предлагается работа самопроверки. Учитывая, что некоторые учителя незнакомы с такой формой работы, расскажем о её принципах.

1) Всем ученикам даётся один и тот же вопрос. Обдумав ответ, они поднимают руку и по команде учителя пишут ответ.

2) После того как ответ написан, учитель просит кого-либо из учеников прочитать своё решение. Решение обсуждается, и каждый ученик ставит около своей записи значок, как оценивается ответ (например, 1 очко, $\frac{1}{2}$ очка, 0 очков; систему оценки учитель должен продумать заранее).

3) Со следующими вопросами всё повторяется.

4) После обсуждения последнего вопроса учитель сообщает, в каком случае какую оценку он поставит.

5) Свои работы ученики сдают по желанию.

Вот работа самопроверки, предлагаемая для этого урока:

1. Из планиметрии известен факт, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Составьте аналогичное утверждение для плоскостей. Если считаете, что оно верно, допишите «да», неверно — «нет».

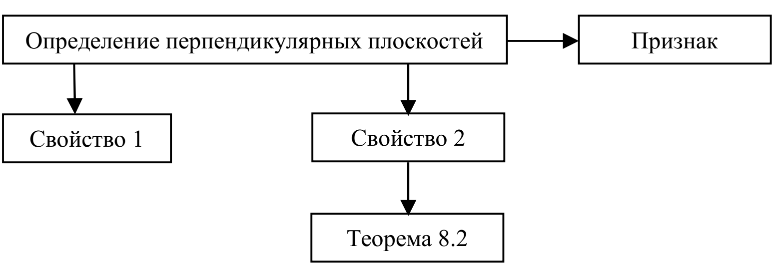
2. Какое можно добавить условие, чтобы первое утверждение стало верным?

3. Докажите, что в правильном тетраэдре боковая грань не перпендикулярна основанию.

4. Откройте учебник. Прочтите ещё раз свойство 1. Составьте противоположное утверждение. Верно оно или нет? Объясните свою точку зрения.

На следующем уроке разбирается признак перпендикулярности плоскостей.

После этого на двойном уроке, посвящённом в основном решению задач, желательно построить схему взаимосвязи разобранных в этой теме математических утверждений (здесь стрелки показывают, какое утверждение где используется).



Этот материал есть маленький, законченный этюд на тему «Перпендикулярность плоскостей», в нём содержится определённый набор фактов. Дело математика — скомпоновать их логически. Фактически любое из утверждений, входящих в схему, после соответствующей переработки может быть принято за определение перпендикулярных плоскостей. Тогда остальные утверждения станут признаками, свойствами. Сообщение этого факта ученикам, несомненно, важный этап в развитии их культуры мышления.

## *Задачи к* § 8

**8.1.** Обращаем внимание на одно из обобщений опережающего характера. Если около многоугольника можно описать окружность, то плоскости, перпендикулярные сторонам этого многоугольника в их серединах, пересекаются по прямой, перпендикулярной плоскости этого многоугольника.

**8.2.** Одно из звеньев в цепочке задач **8.2—9.4—14.5**.

**8.3.** Интересно сравнить случаи б) и в). Сходство в том, что строим сечения плоскостью, перпендикулярной линии пересечения соответствующих плоскостей. Разница в том, как эти линии ищутся (в одном случае надо лишь обосновать уже имеющуюся, в другом развить технику аналогично задачам **2.6** б, в; **9.24**).

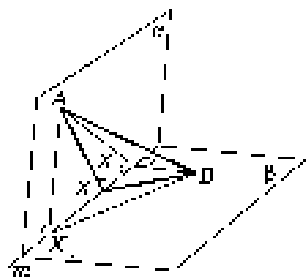


Рис. 24

**8.4.** 1. Проведём $AX_1 \perp m$ в плоскости $\alpha$ (рис. 23). $\triangle AX_1B$ — прямоугольный. Аналогично $\triangle AX_2B$ — прямоугольный ($BX_2 \perp m$).

2. Докажем, что других таких точек на прямой $m$ нет. Пусть $X$ — такая точка на отрезке $X_1X_2$ (причём $|AX_1| = a$, $|BX_2| = b$, $|X_1X_2| = c$), что $\triangle AXB$ — прямоугольный. По теореме Пифагора

$$|AB|^2 = |AX_1|^2 + |BX_1|^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$|AB|^2 = |AX|^2 + |BX|^2 = a^2 + |XX_1|^2 + b^2 + (c - |XX_1|)^2.$$

Приравняв, получаем

$$2|X_1X_2|^2 = 2c|X_1X_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |X_1X| = 0, \\ |X_1X| = c, \end{array}\right.$$

а это и означает, что либо $X = X_1$, либо $X = X_2$. Других вариантов нет. Остальные случаи также отвергаются.

К этой задаче сделаем замечания.

1) *Геометрическое*. Доказываемое утверждение легко представить себе наглядно из следующих соображений. По требованию задачи надо найти вершину прямого угла в треугольнике с постоянной гипотенузой *AB*. Множеством вершин всех таких треугольников является сфера с диаметром *AB*, а нам лишь предстоит понять, в скольких точках эта сфера «протыкается» прямой *m*. Естественно, в двух.

2) *Функциональное*. Полезно проследить теперь, как меняется величина угла при движении вершины *X* вдоль общей прямой. Пока точка *X* движется к отрезку $X_1X_2$ извне, угол увеличивается, оставаясь острым, в точке $X_1$: например, угол становится прямым, пройдя эту точку — тупым, но растёт, пока не дойдёт до некоего среднего положения, и процесс начинает идти в обратную сторону.

3) Если *AB* лежит в плоскости, перпендикулярной *m* (или $AB \perp m$ — на «языке» скрещивающихся пересекающихся прямых), то такая точка *X* одна.

**8.8.** Из предыдущей задачи следует, что ситуация, описанная в этой задаче, может быть только в том случае, если один из катетов перпендикулярен соответствующей плоскости. Но тогда расстояние от вершины острого угла, прилежащего к этому катету, до этой плоскости равно $\sqrt{2}$ (а другое расстояние по условию 1). Таким образом, ответ $\sqrt{2}$.

**8.10.** в) Требует лишь определения перпендикулярности плоскостей.

**8.11.** Эту задачу лучше решить после § 10.

Дано:
*PABCD* — правильная пирамида (рис. 24), $(PAB) \perp (PCD)$.

Требуется доказать:
$(PAD) \perp (PBC)$.

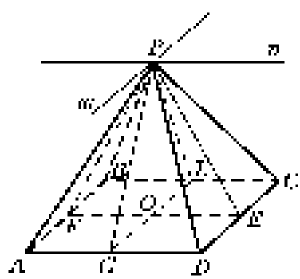


Рис. 24

Решение.

1. Пусть $m = (PAB) \cap (DCP)$, тогда $m \parallel (CD)$ и $m \parallel (AB)$. Проведём апофемы *PF* и *PE*, $PE \perp CD$, тогда $PE \perp m$ и в $(PE) \perp (ABP)$. Значит, $\angle EPF$ — прямой.

2. $\triangle PGL = \triangle PFE$ (по трём сторонам), тогда $(PG) \perp (PL)$. Аналогично пункту 1 доказывается, что $(PG) \perp n$, $(PL) \perp n$, где $n = (PAD) \cap (PBC)$. Следовательно, по второму признаку перпендикулярности плоскостей $(APD) \perp (BPL)$, что и требовалось доказать.

**8.13.** Нужно рассмотреть два случая.

**8.14.** Эта задача, так же как и задача **8.7**, несложна, требует определённой эрудиции от ученика. Но главное — обе задачи готовят учеников к § 11 (ортогональное проектирование).

**8.15.** Возможно, учителю больше понравится такой порядок действий. Сначала формулируется задача: «*n* плоскостей пересекаются по одной и той же прямой. Через данную точку проводятся прямые, перпендикулярные всем этим плоскостям. Докажите, что все эти прямые лежат в одной плоскости».

После решения этой задачи резонно поставить вопрос: нет ли других ситуаций, когда такие прямые лежат в одной плоскости? — и подвести учеников к случаю «б».

**8.16.** В ы в о д. Пусть точка $K$ — общая точка двух окружностей, лежащих в перпендикулярных плоскостях и имеющих общую касательную. Тогда диаметры этих окружностей, проходящие через точку $K$, перпендикулярны между собой (сравните с третьим замечанием к задаче **8.4**) и обратных утверждений много: они либо неверны, либо незначительны, либо требуют для доказательства признака перпендикулярности плоскостей (сравните с задачей **7.39**).

**8.17.** а) По признаку.

б) От противного.

в) Опустим, например, из точки $A$ перпендикуляр на $(CBD)$ (рис. 25). $\triangle CDK$ — прямоугольный, тогда (см. задачу **8.22**) $\triangle CBD$ — непрямоугольный. Так как $|AC| = |AB| = |AD|$, основание $A'$ перпендикуляра попадает в центр описанной около $\triangle CBD$ окружности, и, так как $\triangle CBD$ — непрямоугольный, $A' \notin (CD)$. Тогда $(AA') \not\subset (ACD)$ и $(ACD) \not\perp (CDB)$. (Используется опять определение, а не признак.)

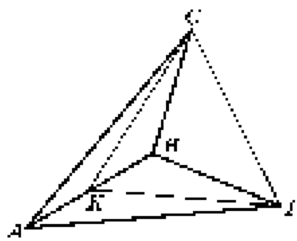


Рис. 25

г) Если взять равнобедренный треугольник с основанием $AB$, то результаты задач «а» и «б» не изменятся. А результат задачи «в» может стать другим. Это можно понять из геометрических соображений: меняя $|AB|$ от 0 до $\infty$, мы тем самым меняем фигуру, образованную полуплоскостями $(ACD)$ и $(BCD)$, от «почти полуплоскости» до «почти плоскости». Значит, есть такое соотношение между сторонами, когда $(ACD) \perp (BCD)$. Непосредственный подсчёт даёт результат $|BD| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AB|$.

**8.18.** Хороший набор задач, но надо учесть, что «в» и «г» проще решаются с помощью перпендикулярных скрещивающихся прямых.

Заметим, что и задача **8.15**, и задача **8.20** легче и прозрачнее доказываются с помощью понятия перпендикулярных скрещивающихся прямых.

## § 9. Параллельные плоскости

Материал этого параграфа не содержит ни одного нового (по сравнению с другими учебниками) факта. Но компоновка самих фактов нетривиальна, прозрачна, глубока по своим идейным соображениям: для введения параллельности плоскостей используется перпендикулярность; леммы и способы их доказательства достаточно общи, что делает сами леммы значимыми теоремами (особенно для решения задач). Теоремы хорошо связаны между собой. Попытайтесь на уроке нарисовать схему построения § 9, показав стрелками, какая теорема используется при доказательстве какой теоремы в этом параграфе.

## *Задачи к* § 9

**9.1.** Решена в тексте. Содержит хорошие геометрические соображения. Для нахождения наибольшей площади достаточно уметь выделять квадрат двучлена.

**9.2.** Есть некоторое обобщение планиметрии и пропедевтика теории (лемма 12.1). Может быть также использована для решения задачи **9.19**.

**9.4.** Это вторая задача на пути к задаче **14.5** (первой была задача **8.2**).

**9.5.** Учитывая тему, задачи полезно решить с помощью прежде всего леммы о пересечении двух параллельных плоскостей третьей (хотя большинство из них решается и методами, развитыми в главе I). Наибольший интерес представляют такие задачи, где эти методы эффективно «сотрудничают». Рассмотрим, например, задачу «д».

1. $MM_1 \parallel CC_1$ ($M_1 \in B_1C_1$)   (рис. 26).
2. $(ML) \cap (M_1D_1) = X$.
3. $(KX) \cap (A_1D_1) = N$.
4. $NL$.
5. $(MQ) \parallel (KN)$, $(MF) \parallel (NL)$.

(Это построение по лемме 9.1 и по второму свойству параллельного проектирования.)

6. $KF$, $LQ$.

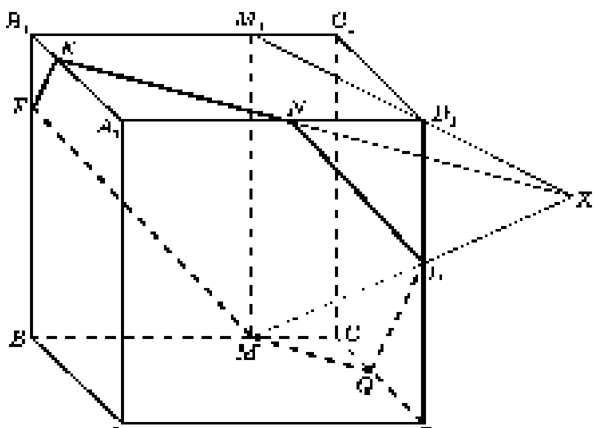


Рис. 26

**9.7.** При выяснении, какого вида четырёхугольник получается в сечении, возникают пропедевтические моменты к теме «Расстояния и углы» (кстати, как и в задачах **9.11**, **9.15**, **9.22**).

**9.8.** Задача в таком виде, как она поставлена, трудна для обобщения. Если имеется время, можно наметить и решить некоторые подзадачи.

1. На прямой поставлено $n$ точек. На сколько непересекающихся частей разбилась прямая? (О т в е т: на $n + 1$ — это очевидно, но можно и доказать методом математической индукции.)

2. На плоскости имеется $n$ данных прямых. Проведена $n + 1$-я прямая, не проходящая ни через одну из точек пересечения данных прямых, но пересекающая их все. На сколько увеличится число областей, на которые делится плоскость? (О т в е т: учитывая пункт 1, новая прямая разобьёт на две все $n+1$ из имевшихся полуплоскостей. Значит, количество областей увеличится на $n + 1$.)

3. Вывести (используя пункт 2) формулу наибольшего числа областей, которые получаются при проведении на плоскости $n$ прямых. $\left(\text{О т в е т: } S_n = 2 + \frac{2+n}{2}(n-1) = \frac{n^2+n+2}{2}.\right)$

4. Рассуждая аналогично пунктам 2 и 3 для пространства, получаем о т в е т: $\frac{n^3+5n+6}{6}$.

**9.10.** Нередко у учащихся возникает вопрос: есть ли такой отрезок? Но этот вопрос уже частично разрешён в задаче **3.20.**

1. Через $(BC)$ и $M$ (рис. 27) проведём плоскость, которая пересечёт $(A_1B_1C_1)$ по $(MN)$ $((MN) \parallel (BC))$ и $(AA_1)$ в точке $A_2$ (по лемме 3.1), $(A_2M) \cap (BC) = C_2$. Прямая $A_2C_2$ — искомая.

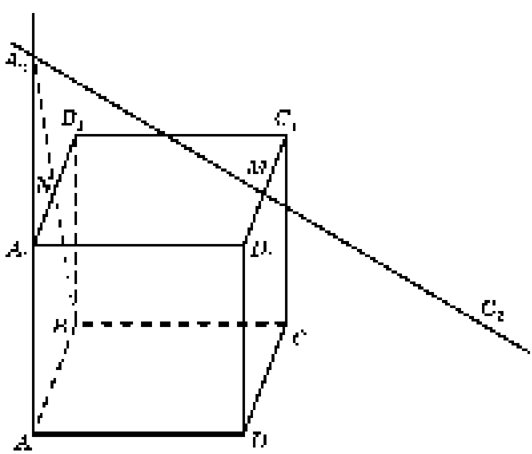


Рис. 27

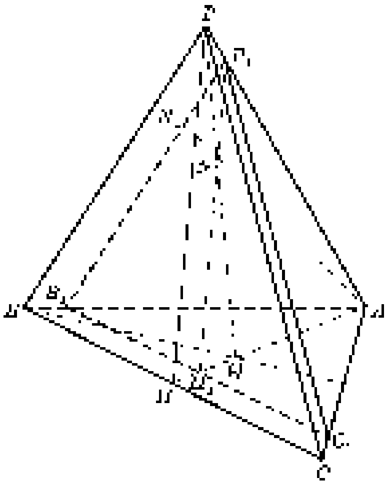


Рис. 28

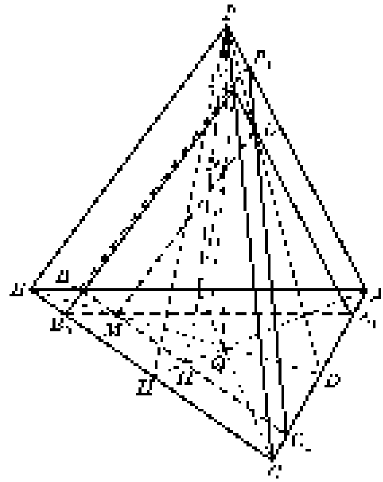


Рис. 29

2. В $\triangle ABA_2$ $A_1N$ — средняя линия. Значит, $|AA_2| = 2a$, где $a$ — длина ребра куба, $|A_2B| = a\sqrt{5}$ (так как $\triangle ABA_2$ — прямоугольный).

3. Из прямоугольного $\triangle A_2BC_2$ $|A_2C_2| = 3a$.

**9.11.** 1. Можно рассматривать как пропедевтику теоремы о сечении конуса плоскостью, параллельной основанию.

2. На рисунке 28 показано построение одного из таких сечений.

I. $(AQ) \cap (BC) = H$, $PH$.

$(P_1H_1) \parallel (PH)$ $(N \in P_1H_1, P_1 \in PA, H_1 \in AH)$.

$(B_1C_1) \parallel (BC)$ $(H_1 \in AH, B_1 \in AB, C_1 \in AC)$.

$P_1C_1$, $P_1B_1$.

$\triangle B_1C_1P_1$ — искомое сечение.

На рисунке 29 показаны два таких сечения, $LM$ — их пересечение, причём $(LM) \parallel BP$ (см. хотя бы задачу **9.3**).

II. Докажем, что эти сечения равны. Рассмотрим снова рисунок 28: треугольники $AP_1B_1$ и $APB$ подобны, треугольники $AP_1C_1$ и $APC$ подобны, треугольники $ABC$ и $B_1C_1$ подобны. Из сравнения соответствующих пропорций выводим, что треугольники $P_1B_1C_1$ и $PBC$ тоже подобны. Коэффициент подобия равен $\dfrac{|P_1B_1|}{|PB|} = \dfrac{|P_1H_1|}{|PH|} = \dfrac{|AN|}{|AN_1|}$. Но так как отрезки, аналогичные $AN$ и $AN_1$, для каждого такого сечения равны (из равенства соответствующих треугольников), то и все такие сечения равны (так как тетраэдр правильный).

III. Вернёмся к рисунку 29: $L$ и $M$ лежат на соответствующих медианах $BD$ и $PD$. Найдём предварительно $|PD|$. Тогда в $\triangle BPD$ (рис. 30) известны все стороны (и углы). Затем ищем последовательно: $|PQ|$ (из прямоугольного треугольника $PQB$), $|NQ|$ и $|NM|$ (из $\triangle MNQ$), $|LN|$ (из $\triangle PNL$ по теореме синусов). В итоге $|LM| = |MN| + |NL|$.

**9.12.** а) Пропедевтика теоремы о сечении конуса плоскостью, параллельной основанию.

б) Построение (рис. 31) аналогично **9.11.** Для вычисления учтём, что $(MN) \parallel (CD)$, а значит, и $LR$ — средняя линия квадрата (см. задачу **9.3**). Тогда $MN$ — средняя линия в $\triangle PRL$.

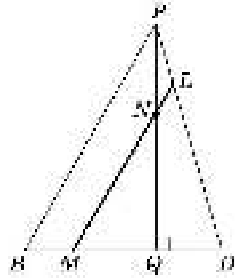


Рис. 30

в) Из подобия $\triangle MAN$ и $\triangle APC$ (рис. 32) $|MN| = \dfrac{3}{4}|PC|$. Интересно отметить: в этом пункте длина высоты является лишним данным.

**9.14.** Задача легко сводится к планиметрической. Под исследованием в зависимости от $\varphi$ имеются в виду выяснение возрастания и убывания площади и периметра, их наибольшие и наименьшие значения.

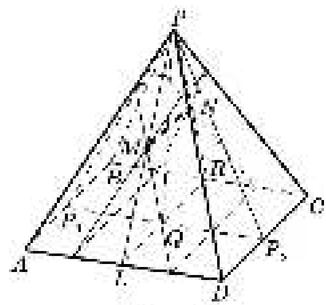


Рис. 31

**9.15.** а) 1. Пусть $MN$ — упомянутый отрезок, соединяющий середины противоположных рёбер тетраэдра (рис. 33), $\alpha$ — переменная плоскость, перпендикулярная отрезку $MN$. Проведём через $M$ прямую $a \parallel (BC)$, $(AP) \perp (MN)$, $a \perp (MN)$. Тогда $MN \perp \beta$ — плоскости, задаваемой прямыми $a$ и $(AP)$. Значит, $\alpha \parallel \beta$. Отсюда (лемма 9.1) сечение — параллелограмм.

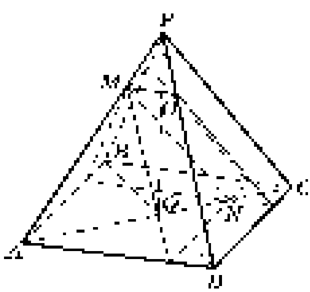


Рис. 32

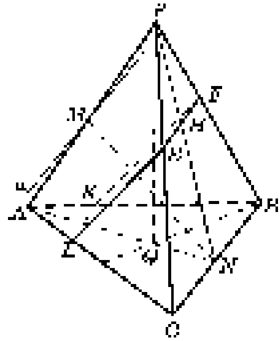


Рис. 33

2. $(BC) \perp (APN)$ (по признаку), тогда $a \perp (APN)$ (по теореме о параллели к перпендикуляру). Значит, $a \perp (AP)$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Следовательно, сечение — прямоугольник.

Нельзя удержаться от замечания, что это рассуждение упрощается, если ввести заранее перпендикулярные скрещивающиеся прямые (см. с. 32).

б) Двигая мысленно точку пересечения α с $MN$ от $M$ к $N$, в силу соображений симметрии и непрерывности понимаем, что граница сечения, являющегося квадратом, соединяет последовательно середины рёбер $AC$, $PC$, $PB$, $AB$ (что и так легко доказывается).

в) Не будет ни то ни другое.

г) Соображения симметрии подсказывают ответ. Попробуем подсчитать. Пусть $|PF| = x$. Тогда $|EL| = 1 - x$,

$$S(EFKL) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2,$$

откуда выводим ответ.

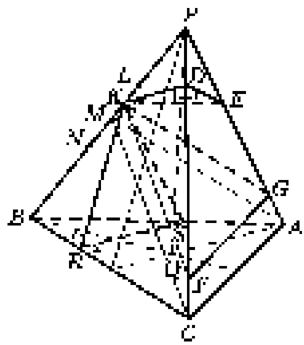


Рис. 34

**9.19.** Легко сводится к планиметрической, если через точку пересечения одной из данных прямых с одной из плоскостей провести прямую, параллельную другой данной прямой. Тогда две полученные пересекающиеся прямые задают плоскость.

**9.22.** Чертёж и его построение в случаях «а», «б», «в» ясны из рисунка 34. Именно для этих трёх случаев имеет геометрически развивающий интерес дополнительный вопрос задачи. (Сравнение же площадей этих трёх сечений ещё с четвёртым, получаемым в пункте «г», приводит к громоздким вычислениям, «идейно» ничего не несущим.) Пусть ребро тетраэдра длиной 1. Для сравнения площадей сечений (обозначим их $S$) заметим следующее:

1. Эти три сечения подобны равным треугольникам, поэтому достаточно сравнить коэффициенты подобия.

2. Сравнение коэффициентов подобия можно заменить сравнением сходственных сторон и даже, более того, соответствующих расстояний от вершины правильного тетраэдра до вершины сечения.

3. Станем двигать точку $K$ от $P$ к $B$. При этом

$$\angle KRS = \angle KDE = \angle FKG = \varphi = \text{const}\ \left(= \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

$|EK|$ увеличивается от 0 до 1 (значит, $S(KDE)$ возрастает), $|RS|$ уменьшается от 1 до 0 (значит, $S(KRS)$ убывает), и только $S(KFG)$ при движении точки $K$ до точки $M$ возрастает, а после убывает. Исходя из соображений симметрии, ясно, что достаточно сравнить $S(KFG)$ и $S(KRF)$ при движении точки $K$ от $P$ к $M$.

После высказанных замечаний сами вычисления труда не составляют. Пусть $|PK| = x$, тогда $|PF| = 2x$, $|BK| = 1 - x = |BF|$,

$$S(KFG) = S(KRF) \Leftrightarrow |PF| = |BF|, \text{ т. е. } 2x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Исходя из всех замечаний и последнего рассуждения можно сделать главный вывод. Пусть точки $L$ и $N$ делят ребро $PB$ на три равные части, считая от $P$. Если точка $K$ внутри отрезка $PL$, то наибольшую площадь имеет сечение $RKF$; если точка $K$ внутри отрезка $NL$, то наибольшую площадь имеет сечение $FKG$; если же $K$ внутри отрезка $NB$, то наибольшая площадь у треугольника $KDE$. Далее (и это просто) рассматриваются точки $B$, $N$, $K$, $P$.

Ответ этот дан без учёта четвёртого сечения. Если принять во внимание и его, то, начиная с точки $U\left(|UP| = \dfrac{2\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}} \in \left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{3}\right)\right)$, наибольшую площадь будет иметь четвёртое сечение. Для облегчения сравнения в этом случае полезно увидеть, что $S(KDE)$ всегда меньше площади соответствующего сечения, перпендикулярного высоте (это можно «увидеть», хотя бы мысленно повернув это сечение около $(KE)$ и положив его на полуплоскость $KDE$).

**9.23.** Один из вариантов решения: через 120° на кольце привязать верёвки одинаковой длины. Эти верёвки привязать к крюку. Из геометрических соображений ясно, что перпендикуляр к плоскости кольца проходит через его центр. Из физических соображений ясно, что этот перпендикуляр (отвес) перпендикулярен плоскости потолка и пола. Значит, плоскость кольца горизонтальна (признак параллельности плоскостей).

**9.24.** Пусть $PABCD$ — четырёхугольная пирамида с выпуклым основанием $ABCD$, $m = (PAB) \cap (PCD)$, $n = (PBC) \cap (PAD)$; $m$ и $n$ задают плоскость $\beta$. Проведём $\alpha \parallel \beta$, чтобы $\alpha$ пересекала все боковые рёбра пирамиды. Полученное сечение — искомое. (Полезно вспомнить задачу **2.16** б и в.)

## § 10. Параллельность прямой и плоскости

Этот параграф легко усваивается учащимися. Сделаем лишь несколько замечаний.

1. Классифицируя взаимное положение объектов (см. пункты 3.1, 10.1), авторы не просто перечисляют случаи, а показывают, что классифицируют, т. е. указывают основание для классификации, что эти случаи взаимоисключающие, а вместе исчерпывают все возможные варианты.

2. Впервые существование параллельных прямой и плоскости выводится из существования параллельных плоскостей.

3. Хотелось бы изменить формулировку леммы 10.1 (о плоскости параллелей), чтобы сделать её более удобной в употреблении и читать её так: «Прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через данную точку, не лежащую в данной плоскости, лежат в плоскости, параллельной данной, проходящей через данную точку, и покрывают её». Кстати, надо учесть своеобразие статуса леммы 10.1: происходя от параллельности прямой и плоскости, она является леммой для признака параллельности плоскостей (теорема 10.2).

## *Задачи к* § 10

**10.2.** Задачи, сформулированные в этом номере, могут быть доказаны учащимися по крайней мере двумя путями: независимо от теоремы 10.1 и сведе́нием к теореме 10.1 хотя бы с помощью задачи **10.3**.

**10.3.** В связи с формулировкой задачи в **10.2** возникает вопрос о переосмыслении (о переформулировке) теоремы 10.1. Ведь последнюю можно сформулировать и так: «Если в данной плоскости существует прямая, параллельная данной прямой, не принадлежащей плоскости, то данная прямая и плоскость параллельны». Утверждение, обратное последнему, гласит: «Если данные прямая и плоскость параллельны, то в данной плоскости существует прямая, параллельная данной».

Задача **10.3** доказывает истинность этого обратного утверждения, более того, показывает, как эту прямую в плоскости можно построить. Именно поэтому задача **10.3** играет заметную роль в решении многих последующих задач (мы её называем на уроках задачей-теоремой **10.3**).

Задачи **10.4**, **10.5**, **10.7** легко доказываются с помощью задачи-теоремы **10.3**. Задача **10.4** перекликается с задачей **3.2**.

**10.8.** Существование — через второй признак параллельности плоскостей. Единственность — от противного — с помощью задачи **9.3**.

Задачи **10.9, 10.12, 10.20** несложны и интересны. Пропедевтика темы «Углы между лучами и прямыми». В задаче **10.12** уточним: $A \notin \alpha$.

**10.13.** Некоторое обобщение. Раньше такой факт можно было доказать лишь для куба (с помощью первого признака параллельности плоскостей).

Задачи **10.16**, **10.17** несложны, интересны, полезны, но требуют внимательного перебора вариантов (особенно в нетривиальных случаях, где нет решения).

**10.25.** а), б) параллельны; в), г), д) пересекаются.

Для полноты набора случаев можно, например, ввести точку $K_6$ — середину $AD$ — и решить вопрос о взаимном положении $(K_2K_6)$ и $(K_3K_4K_5)$.

**10.26.** При проведении сечений плоскостями, параллельными одному ребру, полезно вспомнить задачи **2.8**—**2.13** (особенно задача **2.10**). Если плоскость сечения параллельна ровно двум рёбрам, то эти рёбра скрещиваются. О таком сечении говорилось в задаче **9.15** б. Сравните!

**10.27.** Техника построения таких сечений уже разобрана. При желании можно добавить задачу на сечение, которая не имеет решения (например, плоскостью, проходящей через $AB$, параллельной $(PC)$ и $(LK)$).

## § 11. Ортогональное проектирование

Пожалуй, впервые в школьном учебнике ортогональному проектированию уделено столь большое внимание. Это опять-таки результат общей позиции авторов, связь с практикой в школе, прежде всего с черчением.

Прохождение теоремы 11.1 можно предварить устной опережающей задачей: «Через $A$ провели $a \perp b$ и $\alpha \perp b$. Выяснить взаимное положение $a$ и $\alpha$», после которой доказательство теоремы 11.1 задаётся для самостоятельного разбора учащимися.

Особо хочется остановиться на «Дополнении к § 11». Знакомство с предметом и задачей начертательной геометрии расширяет кругозор и позволяет поработать над развитием пространственных представлений учеников. Начать можно, например, с рисунка 114. Пронумеровав квадранты (хотя бы по рис. 115), учитель ставит вопрос: в каком квадранте и как (примерно) расположена точка $A$ для каждого из случаев «а», «б», «в», «г»?

### *Задачи к* § 11

**11.1.** Задача решена в книге, однако нуждается в комментариях.

1. В её решении вместо слов «Считая известными $|AC|$ и величину данного угла...» лучше, наверное, сказать: «Считая известными $|AC|$ и для любого данного острого угла...», так как вычисляемое расстояние (при котором $(AB_1) \perp (CB_1)$) от величины угла не зависит.

2. Более изящный способ можно открыть, если заметить, что, поворачивая острый угол, мы одновременно поворачиваем и дополняющий его до развёрнутого тупой угол.

3. Отсюда — построение. Проводим через все вершины куба проектирующие прямые параллельно $(A_1C)$ и откладываем на них (в направлении плоскости $\alpha$) отрезки: от точки $B_1$ — отрезок длиной $\frac{2}{3}|A_1C|$, от точки $D$ — отрезок длиной $\frac{1}{3}|A_1C|$ и т. д.

4. Для решения этой задачи полезно воспользоваться результатами задачи **7.7** и теоремой 11.1.

**11.2.** Очередная (очень важная) задача-теорема.

1-й с л у ч а й — равные углы — острые. Разбирается с помощью равенства треугольников.

2-й с л у ч а й — равные углы — тупые. Можно истолковать и как пропедевтику к доказательству теоремы косинусов для трёхгранного угла (там тоже есть аналогичный момент в доказательстве при сведении второго случая к первому).

3-й с л у ч а й — равные углы — прямые. Случай тривиален.

При разборе случаев полезно подчеркнуть, когда именно проекция луча $OA$ попадает на биссектрису, а когда — на её продолжение. Чаще в задачах встречается 1-й случай.

Аналогичные замечания можно сделать и про обратные утверждения.

**11.3.** Эту задачу можно использовать как подводящую к теореме 11.1 и как задачу на закрепление этой теоремы. В зависимости от этого меняется способ её решения.

**11.4.** Примеры инвариантов проектирования: отрезок переходит в отрезок (сохраняется отношение «между»); отрезок, параллельный прямой, переходит в равный ему отрезок и т. д.

**11.5.** а) $\text{пр}_{(BC_1D)}\, A_1C = M$ (рис. 35), $\text{пр}_{(B_1CD)}\, AC_1 = C_1A_2$, где $A_2 = (AA_2) \cap (C_1O)$, причём $(AA_2) \parallel (A_1C)$. Проекции остальных диагоналей строятся аналогично.

б) $(BD_1) \perp (AB_1C)$ (рис. 36), а значит, и плоскости упомянутого сечения. Но тогда проектирующие прямые параллельны $BD_1$. В итоге $B_2D_2$ — искомая проекция.

в) 1. Пусть $\alpha \perp A_1C$ — диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37). Тогда $\alpha \parallel (AB_1D_1)$, $\alpha \parallel (BC_1D)$. Пусть для определённости $C \in \alpha$.

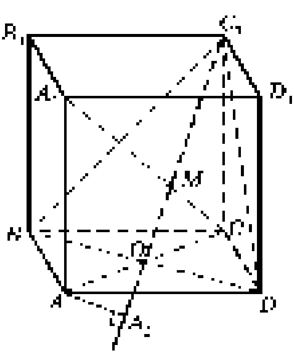


Рис. 35

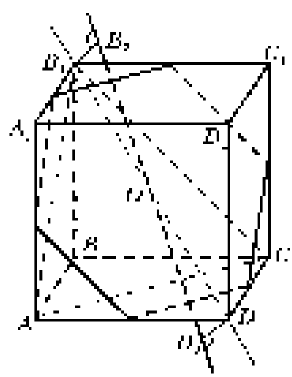


Рис. 36

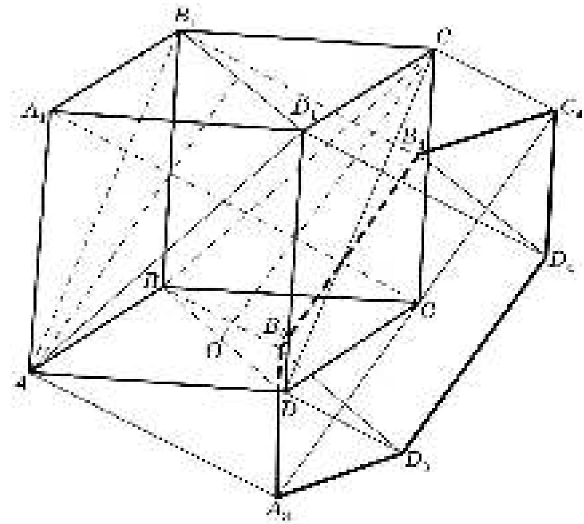


Рис. 37

2. Из рассмотрения диагонального сечения $AA_1C_1C$ хотя бы по теореме Фалеса делаем вывод, что диагональ $A_1C$ делится плоскостями $AB_1D_1$ и $BC_1D$ на три равные части.

**11.6.** г) Интересна как продолжение цепочки, начатой задачами **9.15**, **10.26**.

**11.8.** Границы значений площади проекции треугольника $AXC$ на $(ABC)$ не зависят от высоты пирамиды, так как пирамида правильная. Если же $\triangle AXC$ проектируется на $(PAC)$, то всё зависит от положения проекции точки $B$ на плоскость $(PAC)$ — точки $B_1$. Логически представимы три варианта: $B_1$ лежит внутри треугольника $APC$, $B_1 = P$, $B_1$ лежит вне треугольника $APC$ (но во всех случаях $B_1$ лежит на прямой, содержащей биссектрису угла $APC$).

Пусть, например, высота равна $\frac{1}{2}$. Тогда

$$|PD|^2 = \frac{1}{3}, \quad |BP|^2 = \frac{7}{12},$$

но $|BD|^2 = \frac{3}{4}$. Значит, $\angle BPD$ — острый и рассматриваемый случай соответствует рисунку 38. Из подобия треугольников $DPQ$ и $BB_1D$ находим $|B_1D|$, а затем и площадь $\triangle AB_1C$.

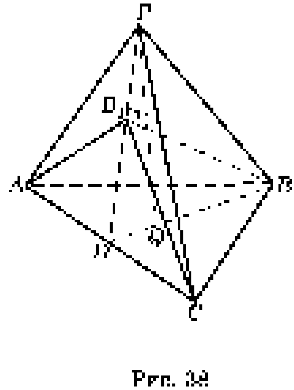


Рис. 38

О т в е т: площадь проекции меняется от $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (площадь $\triangle AB_1C$) до $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (площадь $\triangle APC$).

Произведя аналогичные рассуждения для высоты, равной $\frac{1}{3}$, выясним, что $\angle BPD$ — тупой (рис. 39).

Соответствующие вычисления дают о т в е т: площадь проекции меняется от $\frac{\sqrt{7}}{12}$ (площадь $\triangle APC$) до $\frac{3\sqrt{7}}{28}$ (площадь $\triangle AB_1C$).

В том классе, где исследовательский интерес достаточно развит, учитель может поставить и дополнительные вопросы: какой ещё случай возможен? Какая для этого должна быть высота?

**11.13.** Сейчас это опережающая задача и речь идёт о наблюдениях и посильных обоснованиях.

**11.14.** Пусть проекция тетраэдра $ABCP_1$ — квадрат. Тогда наибольшее ребро — $PB$. Проекция тетраэдра на плоскость другой грани не может быть квадратом, так как для этого необходимо, чтобы грань была равнобедренным прямоугольным треугольником.

**11.15.** Разберём решение, не ссылаясь на то, что $\alpha \perp \beta$ (рис. 40).

1. Пусть $x \cap \alpha = O_1$, $x \cap \beta = O_2$, $A$ — ещё одна точка на $x$, $A_1 = \text{пр}_\alpha A$, $A_2 = \text{пр}_\beta A$, тогда $(A_1O_1) = x_\alpha$, $(A_2 0_2) = x_\beta$.

2. Пусть $x_\alpha \perp a$. Проведём $a_1 \parallel a$ в $\alpha$ через $A_1$. Из того, что $a_1 \perp (AA_1)$ и $a_1 \perp (A_1O_1)$, следует, что $a_1 \perp (OA_1A)$, а значит, $\beta \perp (OO_1A)$.

3. Но тогда $AA_2 \subset (O_1A_1A)$ (по свойству перпендикулярных плоскостей). Следовательно, $x_\beta \subset (A_1O_1A)$, значит, $a \perp x_\beta$, что и требовалось доказать.

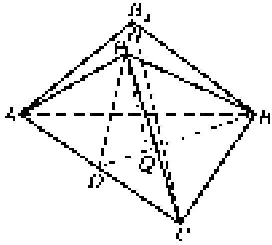


Рис. 39

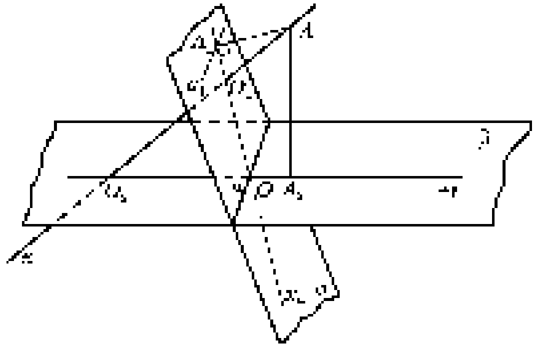


Рис. 40

Сделаем два замечания:

1) Много короче задача решается с помощью перпендикулярных скрещивающихся прямых.

2) Эта задача является опережающей для теоремы о трёх перпендикулярах. Действительно, после разбора этой теоремы и, что важно, замечания 2 к ней эта задача решается устно без чертежа.

* * *

Подведём некоторые итоги работы с главой II.

I. Отметим ценность информации самой по себе, полученной из главы II: учебный материал и способ его изложения нетривиальны, требуют большей мыслительной культуры, и это в согласии с установками учебника подкреплено наглядностью и практикой. Материал этот часто применяется в дальнейшем.

В главе II практически завершается работа над темой «Сечения», дополненной в этой главе уже другими соображениями (прежде всего параллельности). Дальше будут использоваться только навыки, отработанные в главах I и II.

Ортогональное проектирование завершает работу над понятием «параллельное проектирование», что приводит к более тонким и сложным задачам, да и вообще глава II (прежде всего её задачи) существенно продвигает вперёд пространственное представление и пространственное мышление учащихся, развитию которых дала толчок глава I.

Идеи задачи **7.1** дают представление о последней «ипостаси» непрерывности в школьной геометрии. Теперь остаётся только шлифовать навыки по применению понятия «непрерывность» в задачах.

II. Появились новые моменты: другие подходы к понятиям в теории, большое число опережающих задач и задач пропедевтического характера (такое может сбить с толку иногда и учителя). Показаны некоторые технические приёмы решения.

Несколько меняется стиль задач. Появляются задачи, требующие умения увидеть варианты решения, задачи с неполными и избыточными данными, задачи, которые ставят ученика в непривычную ситуацию (например, задача **9.24**), не дают ему в руки привычную математическую модель, а требуют от него создания такой модели, причём на границе с физикой.

III. В связи с этим меняется рекомендуемая здесь методика работы с учениками: бóльшая самостоятельность (в том числе и в работе с теорией) учеников, семинары, уроки-лекции и др.

IV. Но, учитывая всё сказанное выше, каждый учитель сам должен выработать свою позицию по обсуждаемым вопросам: составить свой календарный план; определить, какие задачи решать с учениками и как глубоко их изучать; какие цепочки из них строить и т. д.

Вот, например, популярный вопрос в учительской аудитории: где (после какого пункта) какую из основных задач решать? Ответ зависит от позиции самого учителя. Во-первых, какова тактическая роль задачи? Например, задачу **10.7** можно использовать как опережающую для теоремы 10.2, тогда задачу **10.7** можно решать после леммы 10.1. Но если использовать её для закрепления теоремы 10.2, то решать её надо после пункта 10.3. Во-вторых, какова стратегическая роль задачи и как широко учитель намеревается её использовать для решения других задач (т. е. как задачу-теорему)? Учитывая эти факторы, каждый учитель выбирает время решения основной задачи. На всякий случай, считая основные задачи средством проверки и закрепления знаний, сообщаем, когда какую задачу мы рекомендуем проходить (не считая такую последовательность единственно возможной):

**7.6** — после определения; **7.7**, **7.1**, **7.25**—**7.27** — после пункта 7.1; **7.3**, **7.4** — после пункта 7.3; **7.5** — после пункта 7.4.

**9.2**, **9.3** — после пункта 9.2; **9.20** — можно и после пункта 9.1; **9.3** — после теоремы 9.3.

**10.2** — можно в самом начале, можно в самом конце; **10.3** — после пункта 10.2 (даже пункта 10.1); **10.4**, **10.5**— после пункта 10.3; **10.7**, **10.8** — после пункта 10.3.

**8.2**, **8.1** — после пункта 8.2.

## *План прохождения главы* II

| № урока | Тема и её содержание | Повторение | Примечания |
|---|---|---|---|
| | **I. Перпендикулярность прямой и плоскости (9 ч)** | | |
| 1 | Определение перпендикулярных прямой и плоскости, перпендикуляра, наклонной. Их свойства | Перпендикулярность на плоскости | См. комментарий к § 7. Постоянное сравнение (и в дальнейшем то же) с ситуацией на плоскости |
| 2 | Признак перпендикулярности прямой и плоскости | | |
| 3, 4 | Построение плоскости, перпендикулярной данной прямой. Следствие. Упражнения | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5, 6 | Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости. Упражнения. Самостоятельная работа | Аналогичный материал на плоскости | |
| 7, 8 | Построение прямой, перпендикулярной плоскости. Упражнения | Четырёхугольники в планиметрии, их свойства | Пункты 7.6, 7.7 читаются самостоятельно и обсуждаются на уроке. Можно включить теорию |
| 9 | Проверочная работа | | Можно включить теорию |
| | **II. Перпендикулярность плоскостей. Ортогональное проектирование (6 ч)** | | |
| 10 | Определение и свойства перпендикулярных плоскостей | Материал главы II, пройденный ранее | Здесь же теорема 10.3 как задача. См. комментарий к § 10 с элементами повторения всей главы |
| 11 | Признаки перпендикулярности плоскостей | | |
| 12, 13 | Решение задач | | |
| 14 | Проверочная работа | | |
| 15 | Анализ работы. Упражнения | | |
| | **III. Параллельность плоскостей (7 ч)** | | |
| 16 | Классификация взаимного положения двух плоскостей в пространстве. Первый признак параллельности плоскостей | Четырёхугольники на плоскости | См. комментарий к § 8 |
| 17 | Леммы | | |
| 18 | Основная теорема о параллельных плоскостях | Сечения | |
| 19 | Следствия из основной теоремы. Упражнения | Теорема о равных и пропорциональных отрезках на | В некоторых учебниках теоремы, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | Прямая, перпендикулярная двум параллельным плоскостям. Упражнения | двух прямых, пересечённых тремя параллельными | обозначенной в графе «Повторение», нет. Но зато есть соответствующие задачи |
| 21 | Упражнения. Работа самопроверки | | |
| 22 | Контрольная работа | | |
| | **IV. Прямая, параллельная плоскости (4 ч)** | | |
| 23, 24 | Прямая, параллельная плоскости (лекция = беседа + + решение задачи **9.2**) | Параллельное проектирование | См. комментарий к § 9 |
| 25, 26 | Упражнения. Самостоятельная работа | | |
| | **V. Ортогональное проектирование (4 ч)** | | |
| 27—29 | Ортогональное проектирование. Его свойства | Параллельные проекции | См. комментарий к § 11 |
| 30 | Зачётная контрольная работа | | |

*Комментарий к плану*. Предлагаемый план не учитывает (да и не может, естественно, учитывать) разнообразные варианты, возникающие у работающего учителя. План несколько усреднён. Если, например, ввести на первых уроках перпендикулярность скрещивающихся прямых, то на это потратится максимум два урока (лемма и определение — один урок, и некоторые детали при доказательстве признака отнимут ещё минут 20—30). Но это компенсируется уменьшением времени на пункт 1 до 1 ч и значительным увеличением числа решённых задач. (Это лучше, чем сэкономить время за счёт решения задач. Именно в главе II надо создать определённый «культ» решения задачи, ибо здесь многие задачи — это небольшие творческие исследования, диспуты, проблемы.) Если провести семинар «Способы доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости» (один урок), то урок заменяется на два или три. Опять-таки желательно лишь незначительно ужать остальные уроки, увеличив число часов на всю тему до 31—32 ч.

При существенной нехватке времени можно пройти тему «Ортогональное проектирование» после контрольной работы.

## *Из дидактического материала к главе* II

### *Работа самопроверки* (урок № 21)

1. При каком условии существует прямая, перпендикулярная двум плоскостям?

2. Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

3. Как с помощью угольника проверить перпендикулярность стержня и доски?

4. Что представляет собой множество всех прямых, перпендикулярных данной прямой и проходящих через данную точку, не лежащую на данной прямой?

5. Из точек $A$ и $B$ плоскости $\alpha$ опущены перпендикуляры $AA_1$ и $BB_1$ на плоскость $\alpha_1$. Оказалось, что $|AA_1| > |BB_1|$. Следует ли отсюда, что $\alpha$ и $\beta$ пересекаются?

6. В предыдущей задаче оказалось, что $|AA_1| = |BB_1|$. Следует ли отсюда, что $\alpha \parallel \beta$?

### *Зачётная контрольная работа* (урок № 30)

I вариант

1. Докажите, что плоскость и не лежащая в ней прямая параллельны, если существует плоскость, параллельная данной плоскости и данной прямой. Как можно назвать доказанное утверждение, используя слово «свойство»? слово «признак»?

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через точку внутри ребра $AB$ проведена плоскость $\alpha$ параллельно $(AA_1)$ и $(BD)$.

а) Докажите, что $\alpha \perp (AC)$.

б) Докажите, что $\alpha \perp (A_1B_1C_1)$.

в) Постройте сечение куба этой плоскостью.

г) Объясните, какой многоугольник получился в сечении.

II вариант

1. Докажите, что плоскость и не лежащая в ней прямая параллельны, если существует прямая, параллельная данной прямой и данной плоскости. Как можно назвать доказанное утверждение, используя слово «признак»? слово «свойство»?

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость $\beta$ параллельно $(CC_1)$ и $(AB)$.

а) Докажите, что $\beta \perp (CM)$, где $M$ — середина $AB$.

б) Докажите, что $\beta \perp (ABC)$.

в) Постройте сечение призмы этой плоскостью.

г) Объясните, какой многоугольник получился в сечении.

# ГЛАВА III. РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ

Обсуждение в одной главе двух важных понятий «расстояние» и «угол» — шаг нужный и востребованный практикой. Некоторые учителя уже и раньше рассматривали эти понятия вместе и с общих позиций каждое (особенно при итоговом повторении). Но авторы учебника идут значительно дальше.

1. Попытки дать в системе понятия о разных углах в геометрии были и раньше. Но впервые понятия в этой теме связаны столь органично, изложение теории столь последовательно. Впервые выделяется подготовленная рядом задач (**8.2**, **9.4**, **14.5**) мысль о том, что угол между плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми.

2. Если раньше этот материал и давался с общих позиций, то только с помощью векторов. Между тем изложение в учебнике геометрично, наглядно, чётко.

3. Теорема косинусов для трёхгранного угла выводится опять-таки из геометрических соображений и получает статус метода решения задач, а не какого-то интересного, но «проходного» факта.

4. Общее понятие расстояния между фигурами, даже и появившись в одном из учебников, было фактически только продекларировано и сразу конкретизировано до расстояния между прямыми, плоскостями. В рассматриваемом же учебнике понятие «расстояние» работает. Это и теорема о ближайшей точке, и теорема о трёх перпендикулярах, и понятие общего перпендикуляра, и задачи, развивающие пространственное представление, задачи на множество точек и т. д.

5. Впервые в § 13 даётся пространственное обобщение теоремы Пифагора.

Нет сомнения, что учитель по праву оценит три своеобразных математических этюда, составляющие эту главу.

## § 12. Расстояние между фигурами

Авторы принципиально по-новому подошли к изложению этой темы, начиная с определения и кончая приложением, связали тему «Расстояние» с другими разделами геометрии и практикой. Они по-иному скомпоновали материал, высказав несколько интересных и плодотворных методических идей (прежде всего теорема о трёх перпендикулярах как частный случай более общей теоремы). Естественно, что и задачи, отрабатывающие эти и другие понятия, и продолжение идей этого параграфа в дальнейшей теории и задачах интереснее, обобщённее и носят более развивающий характер.

Несколько предложений, связанных с конкретным опытом работы и обращённых к учителю.

1. Рекомендации авторов по доказательству следствия 1 (теорема о проекциях) туманно воспринимаются учениками. Возможно, стоит

провести более подробное рассуждение, например такое: «Пусть $C$ — ближайшая к $A$ точка прямой $a$, тогда $C$ — ближайшая и к $B$ точка прямой $a$ (по теореме о ближайшей точке). Но в таком случае $B$ является проекцией и точки $A$, и точки $B$ на $a$, что и требовалось доказать».

2. Утверждение, выделенное курсивом в последнем абзаце пункта 12.3, полезно предложить учащимся в качестве задачи на доказательство.

3. Лемма 12.2 — это и задача **9.2**. Учитель может «заготовить» её заранее.

## *Задачи к* § 12

**12.1.** Задача хорошо, с проблемным подходом, разобрана в учебнике. Хотелось бы только подсказать ответы на вопросы, заданные в конце решения.

1. Ответ в двух случаях получился одинаковым, так как конструкции симметричны, а именно два положения $BB_1$ симметричны относительно прямой, перпендикулярной $(ABC)$ и проходящей через $B$.

2. Результат $|BS| = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ говорит о том, что $|BS|$ надо было откладывать в другую сторону (на языке координат это означает, что направление отсчёта и $\overrightarrow{BS}$ противоположны). Поэтому, продолжая вычисления формально, получим тот же ответ.

**12.2.** Задачи под этим номером — хорошая возможность повторить перпендикулярность, задачи на множества точек. Они дают богатый материал для развития речи учащихся (ведь характеристическое свойство каждого из рассматриваемых множеств можно сформулировать несколькими способами). Для множества в пункте «д» у учеников нет названия. Полезно предложить просто наглядный образ. Пусть $a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = A$. Проведём луч $AB$ в $\alpha$ и биссектрисы полученных прямых углов. Станем вращать полученную конструкцию вокруг $a$. Луч $AB$ при этом «заметает» плоскость $\alpha$, а биссектрисы как раз и образуют интересующую нас поверхность — множество искомых точек (при этом её можно и назвать). Можно обратить внимание на постоянство угла между прямой, образующей своим вращением поверхность, и перпендикуляром и между этой прямой и $\alpha$. Это послужило бы некоторой пропедевтикой темы «Угол между прямой и плоскостью» (и задачи **14.8**).

**12.3.** Это некое расширение круга вопросов, поставленных задачами **7.4**, **7.24**, продолжающаяся пропедевтика понятия «вписанные шары», а задача **12.3** а — опережающая для задачи **14.4**. У учителя может возникнуть вопрос: до какой степени обосновывать решение? Всё зависит от установок преподавателя на этот урок. Надо только эти установки чётко сформулировать. Можно, например, весь урок посвятить разбору задачи **12.3** а: повторить свойство биссектрисы плоского угла; навести учащихся на мысль о существовании аналогичного свойства у фигуры, образованной двумя полуплоскостями с общей границей (не вводя новых терминов или вводя — дело учителя); доказать это свойство и т. д. В конце урока наметить идею решения задач **12.3** б и **12.3** в.

А можно, опираясь на интуитивные и пространственные представления учащихся, предложить им посмотреть на фигуру, образованную двумя соседними гранями пирамиды, «в торец». Учащиеся увидят угол. Затем провести через общее ребро этих граней полуплоскость. На изображении «в торец» эта полуплоскость изобразится лучом. Очевидно, что можно так повернуть эту полуплоскость, что угол будет разделён соответствующим лучом пополам. Сказав ребятам, что такая полуплоскость называется биссектором угла между плоскостями этих граней, и предложив им сформулировать его свойство, сообщаем, что оно будет доказано в дальнейшем, но мы пока будем им пользоваться.

Если же учителя не устраивает ни тот ни другой выход, он может отложить решение этой задачи до темы «Вписанные шары».

**12.5.** Можно предложить ученикам серию рисунков на оценку.

**12.6, 12.7.** Упражнения на тему о ближайшей точке (представляется более важным акцентировать внимание на теореме о трёх перпендикулярах, помня о более частом применении её в дальнейшем) и на повторение свойств проекций.

**12.9.** б) Точка $O$ (важно подчеркнуть, что результат не зависит от положения точки $X$).

в) Поступим в полном соответствии с теоремой о ближайшей точке: вместо того чтобы искать точку треугольника $PCD$, ближайшую к $A$, станем искать точку треугольника $PCD$, ближайшую к $A_1 = \text{пр}_{(PCD)}\, A$ (рис. 41). Пусть $E$ — середина $PD$. Тогда $(ACD) \perp (PD)$, и так как $\angle AA_1C$ тупой, то $A_1$ находится на луче $CE$, причём вне треугольника $PCE$. Значит, ближайшей к $A$ точкой треугольника $PCD$ является $E$.

**12.12.** Пропедевтика задачи **15.2** о линии пересечения двух сфер.

**12.14.** Пропедевтика задачи **14.4**. Полезно вспомнить задачу **12.2** в, г.

**12.16.** Это ещё и упражнение на чтение математических символов.

**12.17.** Полное решение задачи составляет разбор нескольких случаев. Пусть $A_1 = \text{пр}_\alpha\, A$, $\angle MNK = \varphi$ — острый (рис. 42). Тогда если $A_1$ внутри угла $LNP$ (рис. 43), то решение есть, и единственное.

Правда, при этом чертежи зависят от того, внутри угла $MNK$ точка $A_1$ или нет. Если же точка $A_1$ не внутри угла $LNP$ (а это видно из данных, потому что $|AN|$ равно одному или обоим расстояниям от $A$ до $[NM)$ и $[NK)$), то решение неопределённое.

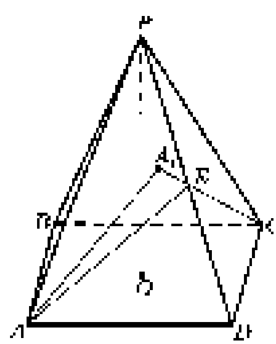


Рис. 41

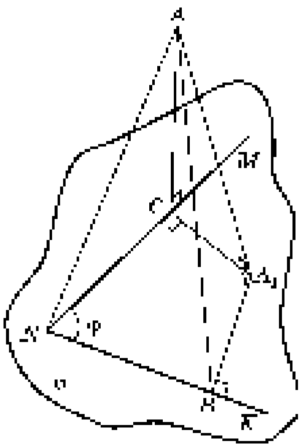


Рис. 42

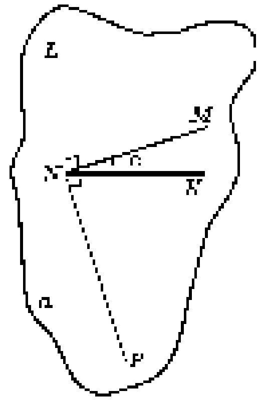


Рис. 43

Приведём решение для самого интересного случая, когда $A_1$ внутри угла $MNK$.

Пусть $|AN| = d$, $|AB| = d_1$, $|AC| = d_2$, $|AA_1|$ неизвестно (что это за отрезки, ясно из рис. 42).

$\triangle NAC$ — прямоугольный: $|NC| = \sqrt{d^2 - d_2^2}$ .

$\triangle NAB$ — прямоугольный: $|NB| = \sqrt{d^2 - d_1^2}$ .

Пусть $(BA_1) \cap (NM) = O$ (рис. 44).

$\triangle NOB$ — прямоугольный:

$$|NO| = \frac{|NB|}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{d^2 - d_1^2}}{\cos\varphi}.$$

Тогда $|CO| = |NO| - |NC| = \dfrac{\sqrt{d^2 - d_1^2}}{\cos\varphi} - \sqrt{d^2 - d_2^2}.$

$\triangle COA_1$ — прямоугольный: $|CA_1| = |CO| \operatorname{ctg} \varphi$.

$\triangle AA_1C$ — прямоугольный. Ищем $|AA_1|$ по теореме Пифагора.

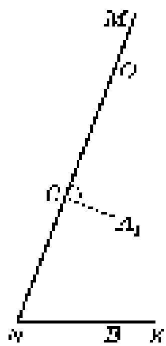


Рис. 44

**12.18.** а) Популярная задача. Надо лишь учесть все варианты.

б) Нет, не сможем. Задав расстояние от трёх вершин трапеции до плоскости, мы не задаём равнобедренную трапецию (можно варьировать длины сторон). Тогда меняется расстояние от четвёртой вершины до плоскости.

в) Для правильного $n$-угольника аналогичную задачу составить можно, если даны $n$ и номера вершин, расстояния от которых до плоскости известны. Тогда, зная, в каком отношении делятся, пересекаясь, диагонали правильного $n$-угольника, можно найти расстояния от этих точек пересечения до плоскости, а затем уже и от остальных вершин до плоскости.

Рассмотрим, например, правильный пятиугольник. Пусть $|A_1\alpha| = |A_1B_1| = d_1$, $|A_2\alpha| = |A_2B_2| = d_2$, $|A_4\alpha| = |A_4B_4| = d_4$ и надо найти $|A_3\alpha| = |A_3B_3|$ и $|A_5\alpha| = |A_5B_5|$ (рис. 45).

Р е ш е н и е. Пусть $A_2A_4 \cap A_1A_3 = C$. Известно (или можно доказать с учащимися), что $\dfrac{|A_2C|}{|CA_1|} = \dfrac{|A_3C|}{|CA_1|} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$. Зная это, а также $d_2$, $d_4$ и воспользовавшись задачей **12.23**, можно найти $|C\alpha| = |CD|$. Зная же $|CD|$ и $|A_1B_1|$, можно найти $|A_3\alpha| = |A_3B_3|$ (по задаче **12.23**) и т. д.

г) Задача для круга имеет определённое решение не всегда. Придумать задачу, которая имеет решение, можно, сославшись на предыдущие пункты. Например, взять на окружности точки, расположенные в определённых вершинах определённого $n$-угольника.

д) В условии задачи надо обратить внимание на слова «данного треугольника». Треугольник дан, т. е. у него считаются известными (находимыми) все его элементы: стороны, углы и т. д. В таком случае задача легко решается с помощью соображений, высказанных в пунктах «а» и «в» этого же номера, и результатов решения задачи **12.23**.

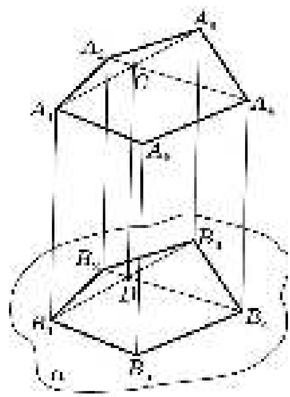


Рис. 45

**12.21.** $|PO| = d_1,\ |PB| = d_2,\ |PD| = d_3$ (рис. 46), $|DO| = \sqrt{d_3^2 - d_1^2}$, $|BO| = \sqrt{d_2^2 - d_1^2}$.

Но $|BO| = 2|DO|$. В итоге

$$d_2^2 + 3d_1^2 = 4d_3^2.$$

Обобщение на правильный многоугольник очевидно, но требует для доказательства знания тригонометрии.

**12.22.** Об этой задаче можно было бы не говорить, если бы в ней впервые не встретился технический приём решения, который многократно будет использован в дальнейшем, а именно проведение плоскости, перпендикулярной общей прямой пересекающихся плоскостей (или в дальнейшем материале ребру двугранного угла). При таком дополнительном построении задача легко сводится к планиметрической, так как все данные и искомые элементы обычно

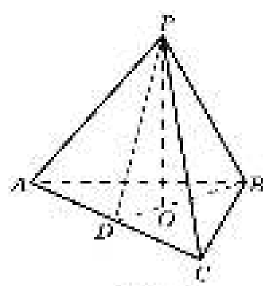



Рис. 46

«загоняются» в эту плоскость. В данной задаче, наиболее простой из этой огромной серии, такая плоскость уже дана — это плоскость $ABC$.

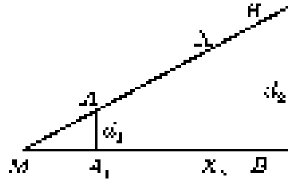


Рис. 47

**12.23.** Возможны два основных случая. Разберём один из них (рис. 47).

Пусть $A$ и $B$ лежат в одном полупространстве относительно α и для определённости $d_1 < d_2$:

$$A_1 = \text{пр}_\alpha A,\ B_1 = \text{пр}_\alpha B,\ X_1 = \text{пр}_\alpha X,$$

$$(AB) \cap \alpha = M.$$

Очевидно, $A_1, B_1, X_1, M$ лежат на одной прямой.

1. Пусть длина одной части $m$, тогда $|AX| = pm$, $|BX| = qm$, треугольники $MAA_1$ и $MBB_1$ подобны, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{|MA|}{(p+q)m + |MA|}$, откуда $|MA| = \frac{(p+q)d_1}{d_2 - d_1}m.$

2. Тогда $|MX| = |MA| + |AX| = \frac{pd_1 + qd_1}{d_2 - d_1}m.$

3. Треугольники $MXX_1$ и $MAA_1$ подобны. Из пропорциональности сторон

$$|XX_1| = \frac{d_2 p + d_1 q}{p+q}.$$

В случае когда $B$ и $A$ находятся в разных полупространствах, ответ $|XX_1| = \frac{d_2 p - d_1 q}{p+q}.$

Возможно, в 11 классе в теме «Векторы» стоит вернуться к этой задаче и показать более короткое решение.

**12.24.** Эта задача решается проще, если повторить задачи **7.19**, **11.8**. Как и в тех задачах, решение зависит от того, куда попадает $P_1$ — проекция $P$ на $(ABC)$. Например, в пункте «а» точка $P_1$ лежит на луче, полученном от продолжения соответствующей высоты треугольника за основание, а в пункте «б» — за вершину. В пункте «в» два варианта ответа, так как $BC$ может быть и катетом, и гипотенузой и т. д.

**12.28.** Если $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$, то $a \parallel c$, $b \parallel c$ (воспользоваться задачей **3.3** или доказать заново с помощью задачи **10.3**).

**12.30.** Через точку $C$ на прямой $c$ проведём плоскость $\beta \perp c$. Тогда $\beta \perp a$, $\beta \perp b$. Пусть $\beta \cap b = B$, $\beta \cap \alpha = A$. Ясно, что $\beta \perp \alpha$ и если $D = \text{пр}_\alpha C$, то решение зависит от положения точки $D$ на прямой $AB$.

Это положение можно выяснить, воспользовавшись предварительно теоремой косинусов для $\triangle ABC$. Ответы соответственно таковы: $0,\ \frac{3}{4}\sqrt{15},\ \frac{4}{3}\sqrt{5},\ \frac{3}{8}\sqrt{73},\ 2\frac{2}{5},\ 2\frac{5}{12},\ 0.$

**12.31.** Эта задача хорошо решается (особенно пункт «б») по формулам, полученным в задаче **12.40**.

**12.35.** Эта задача перекликается с задачей **1.1**. Числовые данные подобраны так, что точка $C$ наиболее удалена от $\alpha$, если находится на проектирующей прямой $AA_1$, и наименее удалена от $\alpha$, если находится на проектирующей прямой $BB_1$.

**12.37.** Проведём плоскости $\alpha$ и $\beta$, содержащие данные круги, $\alpha \cap \beta = m$. $M$ — общая точка кругов. Логически предположимыми являются два основных варианта.

1) Прямая $m$ — касательная хотя бы к одному из кругов (рис. 48).

2) Прямая $m$ — секущая для обоих кругов (рис. 49).

Но второго варианта быть не может, так как из равенства соответствующих треугольников можно доказать, что $|OK| = |OM|$ и $|OM| = |OL|$, т. е. точка $O$ (из которой проведены перпендикуляры к плоскостям) одинаково удалена от трёх точек на прямой $m$, чего быть не может. Остаётся первый вариант.

Пусть $m$ — касательная к кругу $O_2$. Плоскость $(O_2OO_1) \perp m$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Тогда линия её пересечения с $\beta$ проходит через $O$ и перпендикулярна $m$. Но $O_2M \perp m$ как радиус, проведённый в точку касания. Значит, $O_2M$ принадлежит этой линии пересечения. В итоге точки $O$, $O_1$, $O_2$, $M$ оказались лежащими в одной плоскости.

При решении этой задачи полезно вспомнить задачу **8.16**.

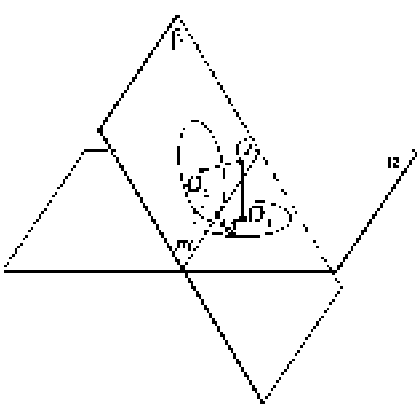


Рис. 48

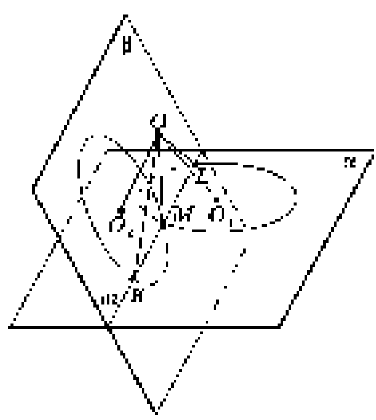


Рис. 49

**12.40.** Задачи эти интересны и полезны настолько, что стоит с самого начала отбросить случаи, когда нет ближайших точек или пр$_\beta A = A_1 \in F$, и заняться существенными формулами.

а) $A_1$ = пр$_\beta$ $A$, тогда $|AA_1| = |\alpha\beta|$. Пусть $B$ — ближайшая к $A$ точка фигуры $F$. Значит, по теореме о ближайшей точке $B$ — ближайшая и к $A_1$ точка фигуры $F$ (рис. 50). Следовательно, $|AB| = |AF|$, $|A_1B| = |A_1F|$, тогда $|AF|^2 = |\alpha\beta|^2 + |A_1F|^2$, что и требовалось доказать.

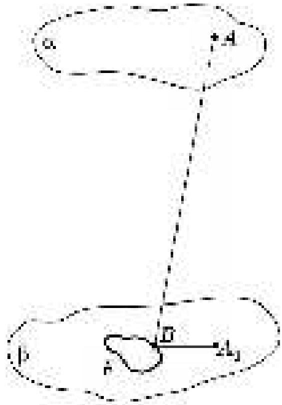


Рис. 50

Интересно, что: 1) мы нигде не пользовались тем, что $\alpha \parallel \beta$; 2) эта формула есть некое обобщение теоремы Пифагора, которое, однако, обобщается, в свою очередь, задачей **12.6** б.

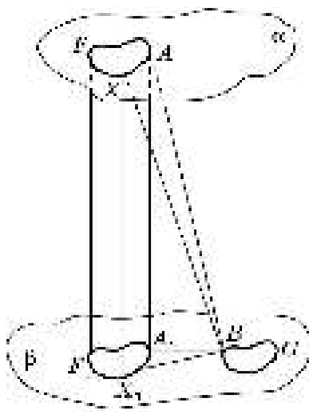


Рис. 51

б) 1. Сначала докажем, что если $A$ и $B$ — ближайшие точки соответственно $F$ и $G$, $A_1$ = пр$_\beta$ $A$, то $A_1$ и $B$ — ближайшие точки фигур $F_1$ и $G$ (рис. 51). Возьмём любую точку $X \in F$. Пусть $X_1$ = пр$_\beta X$. Тогда

$$\left|X_1B\right|^2 = \left|XB\right|^2 - \left|XX_1\right|^2 = \left|XB\right|^2 - \left|\alpha\beta\right|^2.$$

Но $|XB|^2 \geqslant |AB|^2$ (так как $A$ и $B$ — ближайшие точки фигур $F$ и $G$). Значит, из последнего равенства следует, что

$$|X_1B|^2 \geqslant |AB|^2 - |\alpha\beta|^2 = |AB|^2 - |AA_1|^2 = |A_1B|^2.$$

В итоге $|X_1B|^2 \geqslant |A_1B|^2$, а значит, $|X_1B| \geqslant |A_1B|$, т. е. $A_1$ и $B$ — ближайшие точки фигур $F_1$ и $G$.

2. Дальнейшее аналогично «а».

Заметим, что выведенная формула ещё одно обобщение теоремы Пифагора. Её использование для решения задач плодотворно. Пример предлагается в задаче **12.40**, а также в задачах **12.1**, **12.31** и др.

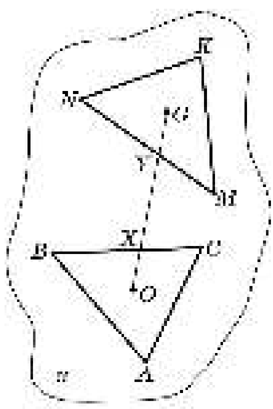


Рис. 52

**12.42.** Пусть $\alpha$ — плоскость, на которой находятся основания тетраэдров $PABC$ и $QMNK$ (рис. 52). $O$ = пр$_\alpha$ $P$, $G$ = пр$_\alpha$ $Q$. Очевидно, что

$$|PQ| \geqslant |OG| > |XY| \geqslant |PABC, QMNK|,$$

что и требовалось доказать.

**12.44.** Задачи просты. Можно лишь посоветовать несколько перестроить вопрос

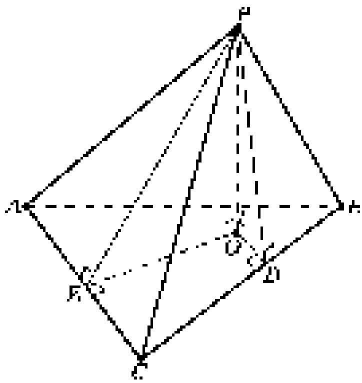


Рис. 53

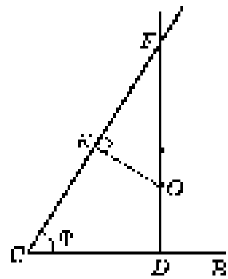


Рис. 54

«а», разложив его на три: «Проверьте, что $\angle B$ — острый; $\angle C$ — острый. Следует ли отсюда, что $\angle BAC$ — тупой?»

**12.48.** Пусть наблюдатели находились в точках $A$, $B$, С, взрыв произошёл в точке $P$. В задаче фактически надо найти высоту $|PO|$ тетраэдра, зная его рёбра. Вот один из вариантов последовательности решения:

1. Из $\triangle APC$ (рис. 53) находим $|PE|$, а затем из $\triangle PEC$ находим $|CE|$.

2. Аналогично из $\triangle PBC$ находим $|PD|$, из $\triangle PCD$ находим $|CD|$.

3. Если $\angle C$ — прямой, ищем $|CO|$ по теореме Пифагора, а затем и $|PO|$. Если же $\angle C$ не прямой, то обратимся к рисунку 54 для острого угла $C$ (для тупого угла $C$ рассуждения аналогичны).

Здесь изображён отдельно $\angle ACB$ (точка $A$ на чертеже не отмечена), $(DO) \cap (AC) = F$.

Зная стороны $\triangle ABC$, можно найти $\varphi$. Затем из $\triangle FCD$, зная $|CD|$ и $\varphi$, найти $|CF|$; $|EF| = |CF| - |EC|$. Наконец, из $\triangle FOE$ $|OE| = |AE| \cdot \operatorname{ctg} \varphi$, а из $\triangle POE$ находим $|PO|$.

## § 13. Пространственная теорема Пифагора

Этот параграф — хорошо продуманный апофеоз теоремы Пифагора. В различных пунктах теории показано значение теоремы, её обобщение и история, а в задачах — некоторые интересные приложения. При доказательстве теоремы для пространства авторы демонстрируют нам, как оно (доказательство) вбирает в себя большой объём знаний, полученных в 10 классе. Тем самым пространственная теорема Пифагора стимулирует некое этапное повторение геометрии 10 класса.

Однако практика преподавания в школе показывает, что для такой работы нужно немало уроков, а для глубокого, неформального усвоения этого материала нужны ещё существенные знания планиметрии. Между тем глава II нередко отнимает больше времени, чем запланировано программой, а если учесть сокращение учебного времени из-за введения переводных экзаменов, то учителю приходится иногда искать компромиссные варианты изложения этой темы. Вот некоторые из них:

1. Ограничиться семинаром по теме «Теорема Пифагора» (предоставляя, таким образом, этот материал больше для самостоятельного изучения). Подготавливается группа вопросов. Например:

— Из истории теоремы Пифагора.

— Почему так важна теорема Пифагора?

— Некоторые способы доказательства теоремы Пифагора на плоскости.

— Пространственная теорема Пифагора для проекций.

Можно предоставить учащимся готовиться самостоятельно, а можно выделить группы, готовящие сообщения для последующего обсуждения. При этом можно ограничиться материалом учебника, а можно подобрать дополнительный материал о различных способах доказательства теоремы Пифагора и различных её «выходах» в теорию. Такой семинар займёт 2 часа, если ставить перед собой цель лишь ознакомить учащихся с материалом.

После семинара естественно отвести несколько уроков на решение задач.

2. Дать пространственную теорему Пифагора как теорему о квадрате длины диагонали прямоугольного параллелепипеда (тем более что именно в таком виде она нужна для решения задач к § 13) и оставить пространственную теорему Пифагора для проекций до темы «Векторы и метод координат» в 11 классе.

Некоторые интересные дополнительные сведения о теореме Пифагора ученики могут получить в этом случае на внеклассном мероприятии, посвящённом этой теме.

## *Задачи к* § 13

**13.1.** Разобрана в тексте. Хотелось бы, чтобы при этом учитель акцентировал внимание учащихся на некоторых технических и творческих моментах решения: 1. Разбор крайнего случая как средство проверки, наведения на мысль. 2. Сведение геометрической задачи к алгебраической системе. (Теперь, с появлением теоремы Пифагора, алгебраические методы всё больше утверждаются в своих правах.) 3. Выявление геометрической сути задачи.

**13.2.** а) Спроектируем точку $X$ на прямые $OA$, $OB$, $OC$ (рис. 55). Пусть проекция $X$ на $(OA)$ — точка $X_1$, на $(OB)$ — точка $X_2$, на $(OC)$ — точка $X_3$.

Построим параллелепипед, рёбра которого $OX_1$, $OX_2$, $OX_3$.

Он прямоугольный. Значит, $|OX_1|^2 + |OX_2|^2 + |OX_3|^2 = |OX|^2$, из чего следует доказываемое.

б) Пусть эти углы равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Действуя аналогично, получаем

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

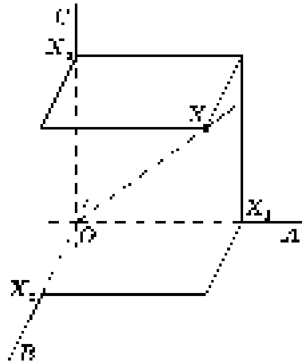


Рис. 55

**13.3.** Задача проста, но интересна для начинающих тем, что в одном случае применяется плоскостная теорема Пифагора, а в другом — пространственная (искомое расстояние — длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, измерения которого — длины высот, проведённых из вершин прямых углов, и расстояния между их основаниями).

**13.5.** Во всех случаях (кроме пункта «г») искомое расстояние — длина диагонали соответствующего прямоугольного параллелепипеда. На рисунке 56 показан случай «д».

**13.6.** 1. (Рис. 57.) Через $K$ проведём плоскость, перпендикулярную $m$ ($m = \alpha \cap \beta$). Эта плоскость перпендикулярна $\alpha$ и $\beta$ и содержит перпендикуляры $KL$ и $KN$, проведённые к ним, поэтому она параллельна $(AA_1)$ ($|AA_1| = |A\beta|$) и $(BB_1)$ ($|BB_1| = |B\alpha|$). В итоге $MLKN$ — прямоугольник со сторонами, соответственно параллельными $BB_1$ и $AA_1$.

2. $\angle B_1AB = 30°$, $|LK| = \dfrac{x}{2}$; $\angle ABA_1 = 30°$, $|KN| = \dfrac{2-x}{2}$; $|Km| = |KM| = ... =$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x-1)^2 + 1};\ D(|KM|) = [0; 2].$$

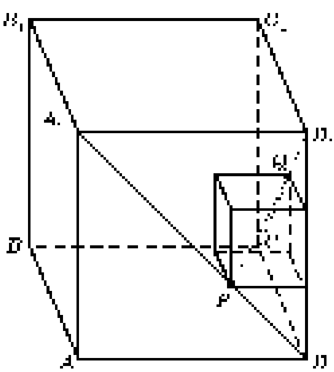


Рис. 56

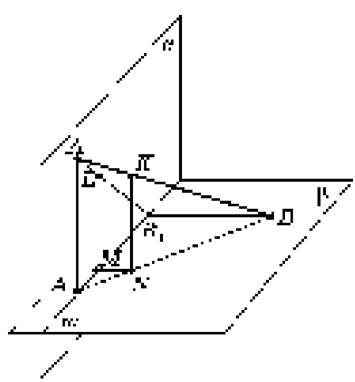


Рис. 57

В ы в о д. Наибольшее удаление от $m$ будет в точках $A$ и $B$ (когда $x = 0$ или $x = 2$). Оно равно 1 (что соответствует условию задачи). Наименьшее удаление при $x = 1$ (в середине отрезка). Оно равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Заметим, что эта задача — звено цепочки задач **8.4**, **13.6**, **14.16**.

**13.10.** Из геометрических соображений ответ ясен: надо знать три независимые величины, тогда пересечение трёх соответствующих поверхностей даёт искомую четвёртую точку, а затем и остальные, зависимые от этих четырёх.

## § 14. Углы

Материал, изложенный в этом параграфе, не отличается от привычного набором фактов; есть некоторые несущественные отличия в композиции материала от других школьных учебников, но при всём том можно отметить бóльшую строгость изложения теории и компактность этого изложения. Леммы 14.1, 14.2 играют роль теоремы о корректности определения угла между лучами; определения всех случаев соответствующих углов собраны в одном пункте, обобщения проведены, отдельные моменты предложены для самостоятельной работы учащихся, связь с наглядностью и практикой, как всегда, неформальна.

Хотелось бы поделиться, однако, некоторыми мелкими замечаниями, диктуемыми конкретным опытом.

1. Доказательство лемм рассчитано на то, что их планиметрический вариант известен ученику. Если это не так, то возникает необходимость рассмотреть и планиметрический вариант.

2. В конце пункта 14.2 говорится о расширении понятия перпендикулярности прямых, а ученикам предлагают убедиться самостоятельно, что прежние теоремы о перпендикулярности пересекающихся прямых остаются справедливыми и для более широкого случая. Но практика показывает, что большинство учеников сами это сделать не могут. Нужна существенная помощь учителя. (Конечно, это относится к тем, кто не проходил определение перпендикулярных скрещивающихся прямых ранее.)

3. Теорема о минимальности угла между наклонной и плоскостью в решении задач и в дальнейшей теории не нужна. Она интересна лишь сама по себе. Поэтому ученикам предлагается доказать её самостоятельно (и даются советы по доказательству).

4. Особо отметим Дополнение к § 14. В соответствии с программой, куда этот раздел не входит, в пособии для учителей не анализируется ни Дополнение, ни задачи к нему. Но практика работы показывает, что изучение этого раздела, особенно теоремы косинусов для трёхгранного угла, значительно расширяет возможности ученика и упрощает решение задач.

## *Задачи к* § 14

**14.1.** Решение в книге основано на результатах задачи **14.5**. Частный, но важный приём.

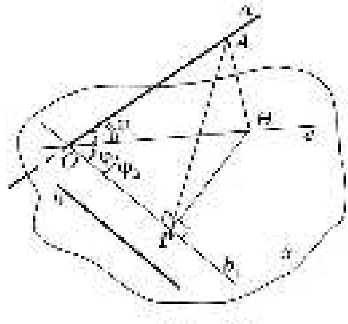


Рис. 58

**14.2.** 1. Дополнительное построение (рис. 58). Пусть $a \cap \alpha = O$. Проведём через $O$ прямую $b_1 \parallel b$. Если $A \in a$, то $H = \text{пр}_\alpha A \in c$, $P = \text{пр}_{b_1} H$. Тогда $AP \perp OP$ и $\angle AOH = \varphi_2$, $\angle POH = \varphi_2$, $\angle AOP = \varphi$.

2. Обозначим $|OA| = m$. Тогда $|OH| = m \cos \varphi_1$, $|OP| = |OH| \cdot \cos \varphi_2 = m \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2$ (из $\triangle OHP$). С другой стороны (из $\triangle OAP$), $|OP| = m \cos \varphi$. Приравняв, получаем

$$\cos \varphi = \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2,$$

что и требовалось доказать.

Это важная формула. Она будет нередко применяться впоследствии в задачах (см. задачу **14.13** и т. д.). Её можно вывести из теоремы косинусов для трёхгранного угла, но если эта теорема не разбиралась, то, наоборот, выведенная формула (важный частный случай теоремы) помогает в решении задач. В частности, из неё следует задача **14.3** (теорема о минимальности угла между наклонной и плоскостью).

Разобранный случай наиболее интересен. Остальные случаи тривиальны.

**14.4.** Если к этой задаче не подступались раньше (см. задачи **12.3**, **12.14**), то одна из предполагаемых последовательностей обсуждения такая:

1. Доказательство того, что полуплоскость, ограниченная ребром двугранного угла и содержащая биссектрису одного из линейных углов, делит этот двугранный угол на два равных двугранных угла. Определение биссектора.

2. Сопоставление биссектора и биссектрисы. Предположение о свойствах биссектора. Доказательство задачи **14.4**.

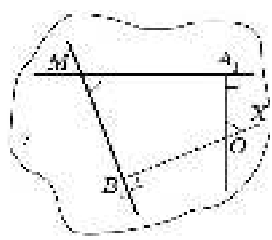


Рис. 59

Хотелось бы обратить внимание на то, что речь идёт лишь о точках угла, равноудалённых от его граней. Здесь под двугранным углом понимается часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями (см. Замечание в пункте 14.4).

**14.5.** Пусть $a \perp \alpha$, $b \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = m$. Возьмём точку $O$ для определённости внутри меньшего из двугранных углов, образованных при пересечении $\alpha$ и $\beta$. Через $O$ проведём плоскость $\gamma \perp m$, $a_1 \perp \alpha$, $b_1 \perp \beta$. Тогда $a_1 \subset \gamma$, $b_1 \subset \gamma$, $\angle a_1b_1 = \angle ab$.

Пусть $a_1 \cap \alpha = A$, $b_1 \cap \beta = B$, $\gamma \cap m = M$. Тогда $\angle A_1MB_1$ — линейный угол между плоскостями (рис. 59). $\angle A_1OB_1 = 180° - \angle A_1MB_1$ не острый. Значит, $\angle A_1OX$ не тупой, поэтому его величина и есть $\angle ab$.

В итоге

$$\angle ab = \angle AOX = 180° - (180° - \angle A_1MB_1) = \angle A_1MB_1 = \angle\alpha\beta,$$

что и требовалось доказать.

Всё это хорошо видно, если посмотреть на построенную конструкцию «в торец», что и наводит на последующее логическое решение.

Эта задача — звено в цепочке задач **9.4**, **10.7**, **14.5**. В дальнейшем применяется в задачах **14.5**, **14.32** и в теории (формула угла между плоскостями — см. 11 класс).

**14.13.** В зависимости от уровня класса и проведённой учителем работы можно решить с помощью теоремы косинусов для трёхгранного угла, задачи **14.2** или просто повторить рассуждения, показанные в задаче **14.2**.

**14.14, 14.15.** Удачно сочетают новое понятие угла между прямыми в пространстве и прежнее понятие угла между прямыми на плоскости. В частности, в задаче **14.14** после соответствующего построения всё сводится к острым углам в прямоугольном треугольнике, а в задаче **14.15** д, е — к теореме косинусов.

**14.16.** Перекликается с задачами **8.4**, **13.6**.

**14.18.** в) Пусть $O$ — центр грани $AA_1B_1B$. Искомый угол $A_1DO$ (обосновать!) — половина угла правильного треугольника $A_1BD$.

ж) $\angle(CB_1)\ (BDC_1) = \angle(A_1D)\ (BC_1D)$, а последний уже найден в пункте д.

Нужно отметить, что вообще задачи **14.18** взаимосвязаны.

**14.19, 14.20** — хороший набор разнообразных упражнений на тему «Угол между плоскостями». Но можно отметить и связь задач **14.20** в и **14.20** г (сумма линейных углов равна 90°) или связь задач **14.20** г и **14.20** д. В задаче **14.20** д угол в два раза больше, и для нахождения его косинуса можно воспользоваться формулой

$$\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

В задаче **14.20** ж намного проще воспользоваться результатами задачи **14.5** (техника такого решения показана в задаче **14.1**) и, вместо того чтобы искать $\angle((AB_1D), (CB_1D))$, найти угол между перпендикулярными к ним прямыми $BA_1$ и $BC_1$ (этот угол равен 60°).

**14.21.** в) Не уточнено, с какой боковой гранью. Поэтому необходимо разобрать два случая (рис. 60).

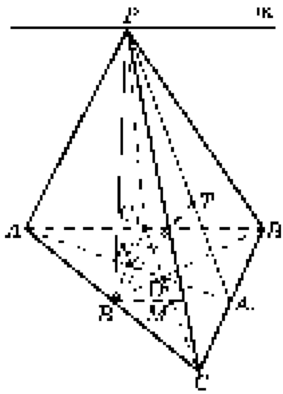


Рис. 60

1-й случай. Угол между ($PB_1A_1$) и ($PAB$) равен углу $MPC_1$ (прямая $m$ на чертеже — ребро соответствующего двугранного угла).

Такие задачи ученики уже решали.

2-й случай. Угол между ($PA_1B_1$) и ($PBC$) можно искать с помощью линейного угла, с помощью угла между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям, но это приводит к громоздким выкладкам. Интересными представляются здесь следующие соображения: ясно, что $(B_1C_1) \perp (PA_1)$. Проведём плоскость $\alpha \perp (PA_1)$ через $B_1C_1$. Пусть $\alpha \cap PA_1 = T$. Тогда $\angle NTB$ — линейный для $\angle((PA_1B_1), (PA_1A))$. Найдём величину этого угла.

Очевидно, $NA_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Из прямоугольного треугольника $NTA_1$ находим: $NT = NA_1 \cdot \operatorname{tg} TA_1A$. Откуда $NT = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Значит, $B_1T = \frac{1}{4}$. Поэтому $\operatorname{tg} B_1TN = \frac{1}{4} : \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. А синус угла $B_1TN$ равен $\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Значит, величина интересующего нас угла равна $\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{3}{11}} = \arccos\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Заметим, что некоторые из задач, входящих в **14.20**, **14.21**, короче и проще решаются с помощью теоремы косинусов для трёхгранного угла.

**14.29.** Полезно предложить ответить на вопросы этой задачи, представив ситуацию в уме, и только затем в случае необходимости сделать чертёж.

**14.32.** Как и в задаче **14.5**, полезно посмотреть «в торец» (провести плоскость, перпендикулярную ребру).

**14.37**, **14.38** — хороший материал для повторения. Хотелось бы только обратить внимание учителя на то, что каждое из истинных утверждений в этих задачах не просто повторение, но и некоторое обобщение известного факта.

**14.48.** б) Пусть $\alpha_1 \cap \alpha_2 = (OC)$, $\alpha_2 \cap \alpha_3 = (OA)$, $\alpha_3 \cap \alpha_1 = (OB)$. Проведём $(OX) \perp \beta$. По задаче-теореме **14.5** $\angle((OC), (OB)) = \angle((AOB), \beta) = \varphi_1$ и т. д. Тогда углы между $\beta$ и плоскостями $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ заменятся соответствующими углами между ($OX$) и ($OA$), ($OB$) и ($OC$). В задаче **13.2**, а было доказано, что сумма квадратов косинусов таких углов равна 1.

**14.52.** Выясним, например, соотношение, позволяющее заключить, что самолёт взлетает. Вместо $h_1$ и $h_2$ (рис. 61) сравним $l_1 \sin \alpha_1$ и $l_2 \sin \alpha_2$:

$$h_2 \geqslant h_1 \Leftrightarrow l_2 \sin \alpha_2 > l_1 \sin \alpha_1,$$

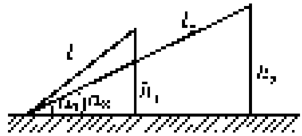


Рис. 61

и так как все сомножители положительны, то $\frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} > 1$. Первая дробь увеличивается, вторая уменьшается. Очевидно, последнее неравенство означает, что расстояния должны расти быстрее, чем уменьшаются синусы углов.

В частности, в числовом примере расстояние увеличилось в 1,5 раза, а синус уменьшился лишь в $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$ раза. Это означает, что самолёт взлетает.

* * *

Сделаем для себя выводы, освоив материал главы III.

I. Смысл и содержание её как будто бы чётко очерчены названием. Ученики знакомятся и «берут на вооружение» различные понимания терминов «расстояние» и «угол» в пространстве. Но этим утилитарным пониманием дело не ограничивается. Если в предыдущих главах ученики встречались с отдельными обобщениями, методическими заготовками, то на этот раз вся глава III — это некое обобщение: мысль движется и от общего к частному (§ 12), и от частного к общему (§ 14), и по аналогии (§ 13). Причём в каждом из § 12—14 есть и другие виды обобщения, здесь просто названы наиболее характерные из них. Предполагается, что ученик достаточно развит, получает удовольствие от конструкции этой главы. Сказанное выше не отменяет, конечно, требований к знаниям фактического материала.

**Про расстояния:** чему (и почему) равно расстояние между двумя геометрическими объектами? Как связаны между собой различные случаи расстояний? Привести контрпримеры (и вообще представлять себе, где можно ошибиться и почему). Как изобразить отрезок, длина которого равна соответствующему расстоянию?

**Про углы:** знать определение и иметь зрительный образ, к которому оно сводится. Как связаны между собой разные определения? Как найти величину соответствующего угла? Привести контрпример. Где можно ошибиться при построении и вычислениях? Где геометрическая фигура, где величина?

II. В главе III существенно используется материал главы II и продолжается работа по развитию пространственного мышления, вариативности решений и пропедевтики будущего геометрического материала: многогранники, шар, вписанный и описанный около многогранника, векторы и координаты. На материале новой теории авторы находят новые возможности для выполнения прежних развивающих задач. Например, в одном только § 14 задачи **14.7**, **14.8**, **14.10**, **14.27**, **14.28**, **14.33**, **14.36**, **14.42**, **14.43**, **14.44**, **14.48** предназначены для «наглядного решения», развития пространственного мышления, пропедевтики понятия «конус» (а иногда и для проведения аналогии угол — конус).

III. Кроме понятий «расстояние» и «угол», ученик знакомится с теоремой о трёх перпендикулярах. Насколько мала роль этой теоремы в дальнейшем изложении теоретического материала, настолько велика её роль при решении задач. Задачи помогают отработать технику приложения теоремы.

IV. Полагая, что основные задачи используются после прохождения соответствующего материала, можно рекомендовать решение задач:

**12.21, 12.17** — после пункта 12.2; **12.39** — после пункта 12.3; **12.2, 12.40, 12.1** —после пункта 12.4; **12.3** — после всего § 12.

**14.2** — после пункта 14.2; **14.3** — после пункта 14.3; **14.4** — после пункта 14.4; **14.5, 14.6** — после пункта 14.5; **14.1** — после пункта 14.5 и задачи **14.5**.

*Комментарий к плану*. Ещё раз хотим подчеркнуть, что указанный план «усреднён». Каждый учитель вправе сообразно уровню класса и своему опыту внести в него изменения. Отметим и сами некоторые возможности.

## *План прохождения главы* III

| № урока | Тема и её содержание | Повторение | Примечания |
|---|---|---|---|
| 1 | Расстояние от точки до плоскости | Ортогональное проектирование | Начать работу над формулировкой с помощью слов «необходимо» и «достаточно» |
| 2—4 | Теорема о ближайшей точке. Следствия. Упражнения. Самостоятельная работа | Перпендикулярность в пространстве. Задачи об ортогональном проектировании | |
| 5, 6 | Расстояние между фигурами. Расстояние и параллельность. Общий перпендикуляр | Расстояния в плоскости. Решение треугольников. Не забыть вернуться к задаче **3.6** | Здесь же отработать решение задач на доказательство про множество точек, обладающих определённым свойством |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7, 8 | Упражнения. Проверочная работа | | |
| 9—11 | Пространственная теорема Пифагора для проекций. Упражнения. Проверочная работа | Расстояния. Теорема Пифагора в планиметрии | При нехватке времени ограничиться теоремой о диагонали прямоугольного параллелепипеда |
| 12, 13 | Угол между лучами, между прямыми | Скрещивающиеся прямые (их перпендикулярность, если проходили раньше) | Обобщение способа доказательства для перпендикулярных скрещивающихся прямых |
| 14, 15 | Угол между прямой и плоскостью. Упражнения | Расстояния, перпендикулярность, параллельность | |
| 16, 17 | Двугранный угол. Угол между плоскостями. Упражнения | Углы на плоскости | |
| 18 | Самостоятельная работа (или работа самопроверки) «Углы» | | |
| 19 | Анализ самостоятельной работы. Решение задач на углы и расстояния | | |
| 20 | Зачётная контрольная работа | | |

1. В начале прохождения главы на первом уроке (особенно если изучение главы начинается после зимних каникул) полезно провести повторительно-обобщающее собеседование на тему «Что мы знаем о перпендикулярности и параллельности». Беседа может сопровождаться заполнением двух таблиц. Первая таблица условно называется «Перпендикулярность». У неё три столбца ($a \perp b$, $a \perp \alpha$, $\alpha \perp \beta$) и две строки: «Признаки» и «Свойства». Вторая таблица условно называется «Параллельность». В ней те же строки, а столбцы: $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$. (При желании можно убрать первые столбцы в двух таблицах.) Работа состоит в том, что все соответствующие теоремы, пройденные в главе II (и в планиметрии), истолковываются и записываются в нужную графу как признак (свойство) соответствующего отношения. Дома предлагается завершить работу, выбрав теоремы о связи этих отношений.

2. Если увеличить число уроков, отведённых на тему «Углы», за счёт решения задач и изучения теоремы косинусов для трёхгранного угла, то тогда-то, очевидно, и придётся сократить время на изучение темы «Пространственная теорема Пифагора» до одного урока (как теоремы о диагонали прямоугольного параллелепипеда), а остальной богатый материал вынести на внеклассное мероприятие (см. комментарий к § 13).

3. Возможно, вместо зачётной контрольной работы или в дополнение к ней учитель найдёт нужным организовать семинар (только этот семинар, в отличие от ранее описанного в этой книге, контролирующий). На этом семинаре даются индивидуальные и групповые вопросы с учётом возможностей ученика, но не ниже необходимых требований. При этом учитель старается построить разговор так, чтобы каждый ученик (при наличии определённой информации и умений) мог участвовать в работе. Вот, например, часть семинара по теме «Расстояния» (вступления-разъяснения нет; ученики знают о семинаре заранее):

I. Вопросы классу:

1. Определение расстояния от точки до фигуры.

2. Определение расстояния от фигуры до фигуры.

3. Расстояния между какими фигурами мы знаем (без доказательств)?

II. Предложение классу — организовать две группы по три человека для подготовки сообщений:

1. Теория о различных расстояниях. Их взаимосвязь.

2. Назовите известные вам множества точек, характеристические свойства которых связаны с понятием «расстояние». (Организуются группы. Ученики готовятся за отдельной партой, а потом оформляют ответ у доски.)

III. Разговор с классом:

1. Лемма о ближайшей точке. Почему она нужна для теоремы о ближайшей точке? Почему нельзя ограничиться теоремой Пифагора?

2. Теорема о трёх перпендикулярах. Как она вводится?

3. Лемма об отрезках параллельных прямых между параллельными плоскостями: как доказывается, где применяется?

IV. Выслушиваются сообщения групп. Учащиеся рецензируют рассказы товарищей.

V. Создаётся группа из двух человек для разработки идеи решения **13.6**.

VI. С классом продолжается обсуждение отдельных теорем из раздела II (если остаётся время, выясняем решение задачи **12.28**).

VII. Выслушивается идея решения задачи **13.6** (при этом в задачах **12.28**, **13.6** большее внимание — теории).

VIII. Подведение итогов.

Похожий семинар можно посвятить теме «Углы».

## *Из дидактического материала к главе* **III**

### ***Устная проверочная работа*** (урок № 11)

1. В тетраэдре $PABC$ $PA \perp ABC$, $\angle C$ — прямой ($P_1$ — середина $AP$, $B_1$ — середина $AB$, $C_1$ — середина $AC$). Проведена плоскость

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| $P_1BC$. | $PB_1C_1$. |

Какая фигура получилась в сечении (без чертежа)? Обосновать.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (чертёж на доске), длина ребра которого 1.

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| а) Точка $M$ движется по $A_1C_1$. Как меняется её расстояние от $BD$? | а) Точка $M$ движется по $AD$. Как меняется её расстояние от $C_1D_1$? |
| б) Найти $\lvert(DA_1C_1), (ABC)\rvert$. | б) Найти $\lvert(DA_1C_1), (ABC)\rvert$. |
| в) Найти $\lvert O_1B\rvert$, где $O_1$ — центр верхней грани. | в) Найти $MC$, где $M$ — середина $AA_1$. |

3. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ (чертёж на доске) $a$ — длина ребра основания , $b$ — длина бокового ребра, $Q$ — центр основания.

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| Найти $\lvert A, (BPQ)\rvert$. | Найти $\lvert C, (APQ)\rvert$. |

### ***Работа самопроверки*** (урок № 18)

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (чертёж на доске).

$K$ — середина $AD$. $L$ — середина $CD$.

$M$ — середина $AA_1$. $N$ — середина $CC_1$.

Найти $\lvert D_1, (B_1D)\rvert$.

$\lvert(B_1D), (BC)\rvert$.

$\angle((B_1D), (BC))$.

$\angle((MK), (LN))$.

$\angle((DB_1), (BB_1C_1))$.

$\angle((MK), (B_1CD_1))$.

Можно записать лишь значение тригонометрической функции.

2. Указать две пары перпендикулярных скрещивающихся прямых, определяемых вершинами куба (желательно подобранные по разным идеям).

3. Даны две параллельные прямые. Сколько прямых двугранных углов можно провести так, чтобы на каждой из граней лежала ровно одна прямая?

4. Что представляет собой множество точек, удалённых от двух данных пересекающихся плоскостей на расстояние $d$?

***Зачётная контрольная работа*** (урок № 20)

I вариант

В вершине $K$ тетраэдра $MKTP$ сходятся три прямых угла, причём $|MK| = 5$, $|KP| = |KT| = 5\sqrt{2}$, $L$ — середина $KT$, $S$ — середина $KP$, $M_1$ — середина $PT$.

Найти: 1) $\angle((MM_1), (KTP))$; 2) $\angle((LS), (MM_1))$; 3) $|K, (MTP)|$; 4) $\angle((MTP), (KTP))$; 5) $\angle((MKM_1), (MTP))$; 6) $|(LS), (MM_1)|$.

II вариант

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $|AB| = 6$, $|AD| = 8$, $|AA_1| = 10$, $AM$ — высота в $\triangle ABD$.

Найти: 1) $\angle((D_1B), (ABC))$; 2) $\angle((AM), (D_1B))$; 3) $|A, (DBB_1|$; 4) $\angle((AA_1D), (DBB_1))$; 5) $\angle((AMA_1), (A_1BD))$; 6) $\angle((BC), (B_1D))$.

# ГЛАВА IV. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ И ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ И ТЕЛА

Это одна из интереснейших глав учебника. Роль её в развитии ученика трудно переоценить. Во-первых, впервые в пределах одной главы дан обзор (и не поверхностный) пространственных фигур и тел, изучаемых в школе, а заключительный § 19 «Тела» логически чётко очерчивает основной предмет геометрии в пространстве. Во-вторых, сам методический и педагогический подход к изложению принципиально отличается от ранее применявшихся. Он привлекает значительной степенью общности, требует неформального богатого пространственного представления и мышления, геометричен по самой своей сути. Не в меньшей степени всё сказанное выше относится и к задачам. Некоторые из них созданы буквально на пустом месте и не освящены традицией предыдущих учебников. Важно отметить продолжающуюся связь с математическим анализом. В-третьих, глава содержит богатый дополнительный материал, достойный специальных школьных семинаров, поднимающий знания тех, кто освоит этот материал, на качественно новый уровень.

В то же время изложение теории и задачи удивительно наглядны, факты и идеи главы просты и впечатляющи. Учителю важно не потерять этот настрой главы, не заниматься теоретизированием (если учесть, что ученики к концу учебного года изрядно устали).

## § 15. Сфера и шар

Изучение пункта 15.1 «Понятие сферы и шара» можно построить на постоянном сопоставлении с планиметрией (окружность и круг). Тогда ученики сами сформулируют необходимые определения и сделают нужные обобщения.

В пункте 15.2 смущает длинная формулировка теоремы. Возможно, некоторым учителям покажется методически более интересной замена (по крайней мере первоначальная) этой теоремы задачей: «Исследовать, что представляет собой множество точек, общих для шара и плоскости, в зависимости от расстояния от центра шара до плоскости». Тогда громоздкая формулировка была бы эмоционально оправданна, ибо служила бы результатом собственного исследования. Более того, может, задача стала бы предметом некоторого «соревнования»: кто более внимателен при исследовании и сделает больше полезных выводов (а потом и следствий — о величине сечения, об изменении его площади; полезно исследовать формулу $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ на возрастание и убывание). Подчеркнём связь с географией: именно на этом уроке полезно повторить, что такое географическая широта и долгота (это необходимо и для решения задач).

Теорема 15.2 допускает различные доказательства (кстати, продолжается аналогия с планиметрией). После прохождения пункта 15.4 полезно дать в качестве дополнительных вопросов или устной работы задание: изобразить конфигурацию (проверяя правила изображения). Например: «В шар вписана правильная четырёхугольная пирамида так, что её основание вписано в бо́льшую окружность. Сделать чертёж».

В пункте 15.5 (довольно сложном по устройству) практически доказываются два взаимно обратных утверждения (две теоремы), показывающие эквивалентность двух определений ближайшей к $A$ точки фигуры $F$; есть интересные наглядные и практические моменты.

## *Задачи к* § 15

**15.1.** Решение в тексте. Сама по себе это важная задача-теорема, которая неоднократно будет использована в дальнейшем (**15.4**). Но, кроме того, задача **15.1** — продолжение цепочки **7.39**, **8.16**, **12.37**.

В книге даны три способа решения задачи **15.1**. Необходимо разобрать все три. Сначала первый и второй: они дают геометрическое и логическое истолкование и как бы готовят к формально-абстрактному третьему способу. Третий способ эффектен и будет применён в дальнейшем.

**15.2.** Так как сферы даны, их взаимное положение фиксировано, то считаем известными их радиусы $R_1$ и $R_2$ и расстояние между центрами $|O_1O_2|$.

Произведём сечение конструкции плоскостью, проходящей через два центра (рис. 62). Проведём в $\triangle O_2O_1M$ высоту $MH$. Ясно, что расстояния $|O_1H|$ и $|MH|$ одинаковы для всех общих точек двух сфер (что нетрудно доказать). Значит (из леммы о плоскости перпендикуляров), все точки линии пересечения сфер лежат в одной плоскости и, кроме того, удалены от $H$ (лежащей в той же плоскости) на одно и то же расстояние. Значит, все общие точки двух сфер лежат на окружности, которая одновременно является линией пересечения плоскости перпендикуляров с данными сферами. Но эта окружность принадлежит обеим сферам (а других общих точек, не лежащих на этой окружности, у них быть не может). Значит, линия пересечения — окружность. Можно было решить эту задачу более традиционно, с помощью равенства треугольников, но хотелось использовать специфику данного учебника. Напомним, что наглядно это рассуждение соответствует такому образу: два круга (см. рис. 62) вращаются вокруг оси — прямой $O_1O_2$.

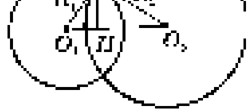


Рис. 62

**15.3.** а) Помимо связей с прежними задачами на равноудалённость, эта задача, в сущности, третья часть теоремы 15.1.

б) Опирается на «а».

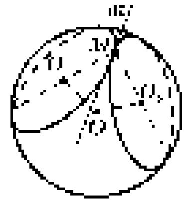


Рис. 63

**15.4.** а) Проведём $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — плоскости этих окружностей. Пусть $\alpha_1 \cap \alpha_2 = m$ (рис. 63). Тогда (по задаче **15.1**) $m$ — общая касательная данных окружностей. Далее — стандартный приём — через ($OO_1$) и ($OO_2$) проводим плоскость $\gamma$. Доказывалось, что $M \in \gamma$, где $M$ — общая точка окружностей.

б) Нельзя. Составим обратную задачу. Пусть даны две такие окружности и надо найти центр содержащей их сферы. Меняя угол между $\alpha_1$ и $\alpha_2$, получаем различные положения центров сфер, а значит, и разные их радиусы.

**15.5.** Практически уже решалась (см. **12.3** а, б), но теперь можно вернуться к этим задачам на другом уровне (или начать, если раньше задачу **12.3** не решали), так как решена задача-теорема **14.4**.

**15.6.** Вообще говоря, это обобщение соответствующей задачи планиметрии (о сегменте, «вмещающем» данный угол). Но эта задача планиметрии не всегда разъясняется в предыдущих классах. Поэтому учитель может предварительно рассказать её планиметрический вариант, а может сузить задачу **15.6**. Например: «Построить множество точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом».

**15.7.** а) На 3 или на 4; б) от 4 до 7; в) 10; г) $6n + 2$, если призма $n$-угольная.

**15.8.** В задаче **8.16** (если учитель имел возможность подробно решить её с классом) разбиралась задача о кругах, имеющих общую хорду, и при составлении обратной задачи выяснилось, что задание двух таких окружностей в пространстве при фиксированном их взаимном положении уже чётко определяет положение центра сферы, их содержащей. А третью окружность, имеющую с каждой из первых двух по две общие точки, можно располагать по-разному, в том числе и так, чтобы она не лежала на уже построенной сфере.

**15.9.** Хорошая задача прежде всего на пространственное мышление. Какая конфигурация может получаться из таких четырёх плоскостей? От этого зависит и ответ. Конечно, при разборе случая, когда эти четыре плоскости содержат грани тетраэдра, представляется прекрасная возможность сделать с помощью аналогии экскурс в планиметрию и поговорить о вневписанных окружностях.

**15.10.** а) Находим площадь треугольника по формуле Герона. Тогда $R = \dfrac{abc}{4S}$. Можно пойти другим путём: найти косинус любого угла (по теореме косинусов), затем — синус и радиус по формуле $\dfrac{a}{2} = R \sin A$.

Расстояние до треугольника зависит от величины его наибольшего угла; последняя определяет, куда попадает проекция центра сферы на плоскость треугольника (на треугольник или вне его).

б) Находим площадь треугольника по формуле Герона, тогда $r = \dfrac{S}{p}$.

Или по-другому: находим косинусы двух углов ($A$ и $B$, например) и решаем уравнение $2\ \mathrm{ctg}\ \dfrac{A}{2} + \mathrm{ctg}\ \dfrac{B}{2} = c$.

**15.11.** Снова стандартный приём в новой ситуации. Построим плоскость через радиусы, проведённые в точки касания, и задача сведётся к планиметрической.

**15.16.** Обозначим радиус сечения $r$. Тогда площадь сечения $S = \pi(R^2 - d^2)$, где $d$ — расстояние от центра шара $O$ до плоскости $\alpha$ сечения. Очевидно, что $S$ убывает с возрастанием $d$. Станем мысленно поворачивать плоскость сечения вокруг прямой, содержащей данные точки $A$ и $B$. Если $d = 0$ (плоскость проходит через центр шара), то площадь сечения наибольшая ($\pi R^2$). Рассмотрим случай, когда плоскость перпендикулярна медиане $OM$ треугольника $OAB$. Именно $|OM|$ в этом случае есть $|O\alpha|$. В остальных случаях $OM$ — наклонная и больше соответствующих $|O\alpha|$. Значит, $|OM|$ — наибольшее из возможных значений $d$. Тогда площадь сечения наименьшая. Она равна $\dfrac{\pi|AB|^2}{4}$.

**15.18.** а) Пусть $O_1$ и $O_2$ — центры этих шаров, $M$ — их общая точка. Проведём $O_1A$, $O_2B$, $MN$ перпендикулярно плоскости $\alpha$, на которой лежат шары. Проведём через них плоскость и изобразим сечение этой конструкции (рис. 64). (Такая ситуация уже встречалась в задаче **12.23**, но вряд ли стоит ссылаться на выведенную там формулу, так как это было давно. Полезнее повторить и задачу **12.23**, и само рассуждение ещё раз.)

Пусть для определённости $R_1 < R_2$, $|O_1P| = x$.

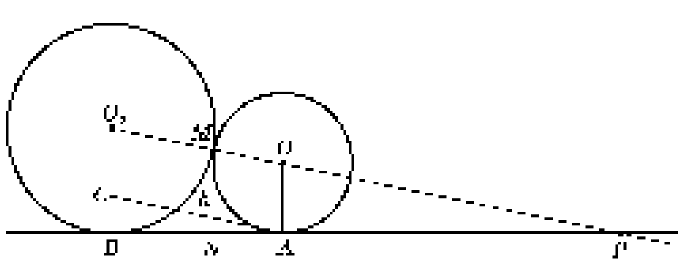


Рис. 64

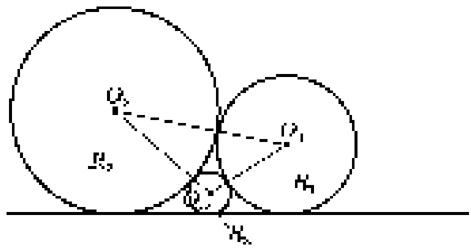


Рис. 65

Треугольники $O_1AP$ и $O_2BP$ подобны, следовательно, $x = R_1 \cdot \dfrac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1}$. Тогда $|MP| = \dfrac{2R_1R_2}{R_2 - R_1}$.

Треугольники $MNP'''$ и $O_1AP$ подобны, следовательно, $|MN| = \dfrac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$.

(Возможны и другие способы решения, но здесь нарочито даётся способ, который требует знаний из планиметрии.)

б) Из $\triangle ABC$ ($AC \parallel O_1O_2$) $|AB|^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_2 - R_1)^2 = 4R_1 \cdot R_2$, $|AB| = 2\sqrt{R_1 \cdot R_2}$.

(Исходя из б) можно предложить ещё один способ решения задачи а): найти $|MN|$ как сумму $|ML|$ и $|LN|$, где $L$ — точка пересечения $MN$ и $AC$.)

в) Рассмотрим случай, когда все три центра шара лежат в одной плоскости, перпендикулярной данной. Тогда соответствующее сечение конструкции имеет вид, изображённый на рисунке 65.

Используя задачу **15.18** б, получаем уравнение $2\sqrt{R_1 \cdot R_3} + 2\sqrt{R_2 \cdot R_3} = 2\sqrt{R_1 \cdot R_2}$, откуда $R_3 = \dfrac{R_1R_2}{\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right)^2}$. В остальных случаях решение неопределённое.

**15.23.** Сводится к планиметрической.

**15.24.** а) Просто аналогия с соответствующей планиметрической задачей.

б) Может быть решена тем же приёмом, что и задача **15.2** (используя результат **15.24** а).

**15.26.** а) Общий случай построения такой плоскости описан при рассмотрении способов решения задачи **15.32**.

б) Рассмотрим, например, случай, когда прямая $a$ и шар не имеют ни одной общей точки. Проведём через $O$ (центр шара) плоскость $\alpha \perp a$. Пусть $\alpha \cap a = M$. Через $M$ в $\alpha$ проведём касательную к сечению шара плоскостью $\alpha$. Плоскость, задаваемая прямой $a$ и касательной, искомая.

**15.27, 15.28.** Сходство этих задач в том, что они имеют единый наглядный образ (вращение соответствующего прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей гипотенузу) и доказываются с помощью равенства треугольников (или постоянства значений тригонометрической функции соответствующего угла). Но есть и разница: задача **15.27** решается проще.

При решении задачи **15.28** полезно воспользоваться результатом задачи **15.24** а и не забыть разобрать оба варианта расположения точки $K$.

**15.29.** Опять некое развитие теоремы планиметрии. В поисках расстояний несущественные отличия от задачи **15.10**.

**15.30.** а) Ситуация не раз обсуждалась и изображена на рисунке 66 (других случаев быть не может — см. хотя бы задачи **8.16, 15.1**).

Пусть $|O_1M| = r_1$, $|O_2M| = r_2$. Тогда радиус шара $|OM| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

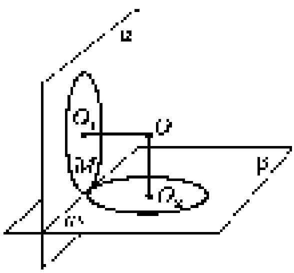


Рис. 66

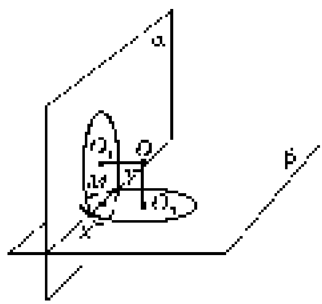


Рис. 67

б) Пусть $XY$ — общая хорда (рис. 67), $|XY| = d$, $M$ — её середина,

$$|O_2M| = \sqrt{r_2^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{\sqrt{4r_2^2 - d^2}}{2}.$$

Аналогично

$$|O_1M| = \frac{\sqrt{4r_1^2 - d^2}}{2}, \quad |OM|^2 = \frac{4r_1^2 + 4r_2^2 - 2d^2}{4},$$

тогда $|OX| = R = r_1^2 + r_2^2 - \dfrac{d^2}{2}$.

в) Радиус шара найти нельзя. Данных недостаточно!

Пусть $S$ — центр шара, $\alpha \perp \beta$ — данные плоскости. Пусть $\alpha \cap \beta = M$, $O_1$ и $O_2$ — центры кругов. Проведём $(O_1SO_2)$.

Пусть $(O_1SO_2) \cap \alpha = (O_1M)$, $(O_1SO_2) \cap \beta = (O_2M)$.

Двигая центры кругов $O_1$ и $O_2$ вдоль прямых $O_1M$ и $O_2M$ соответственно (но сохраняя при этом расстояние $d$), получаем различные прямоугольники, в которых различные $|O_1O_2|$, а значит, и радиусы соответствующих шаров.

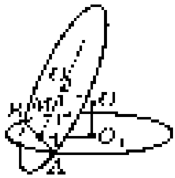


Рис. 68

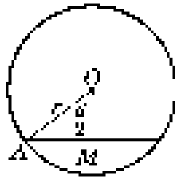


Рис. 69

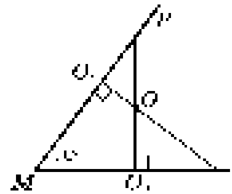


Рис. 70

**15.31.** $r = R\cos\dfrac{\varphi}{2}$. Стандартное построение: плоскость $(O_1OO_2)$ (рис. 68).

Из $\triangle O_1MA$ имеем $|O_1M| = \sqrt{r_1^2 - \dfrac{d^2}{4}}$ (рис. 69);

из $\triangle O_2MA$ имеем $|O_2M| = \sqrt{r_2^2 - \dfrac{d^2}{4}}$ (см. рис. 68);

из $\triangle MPO_2$ имеем $|MP| = \dfrac{|MO_2|}{\cos\varphi}$ (рис. 70).

$|O_1P| = |MP| - |O_1M|$; $|OO_1| = |O_1P|\ \mathrm{ctg}\ \varphi$. Теперь, зная $|OO_1|$ и $r$, можно найти $R$ (сравните с задачей **12.17**).

Если сечения находятся на расстоянии $d$ между собой, то для решения задачи недостаточно данных. Это показано в задаче **15.30** в.

**15.32.** Полезно начать с аналогичной задачи для плоскости: «Даны два круга. Требуется провести прямую, на которой эти окружности высекали бы хорды одинаковой длины». Наметим план решения этой задачи. Пусть для определённости радиус первого круга меньше радиуса второго круга, т. е. $R_1 < R_2$. Возьмём отрезок $a$, длина которого меньше $R_1$, и построим отрезки $r_1 = \sqrt{R_1^2 - \dfrac{a^2}{4}}$ и $\sqrt{R_2^2 - \dfrac{a^2}{4}} = r_2$, а затем и окружности с центрами соответственно в точках $O_1$ и $O_2$ данных окружностей и радиусами $r_1$ и $r_2$. Проведём к ним общую касательную. Это и есть искомая прямая. Такое построение, очевидно, невозможно, если общей касательной не существует, т. е. одна из построенных окружностей находится внутри другой.

Чтобы решить аналогичную задачу в пространстве, можно поступить двояко.

1. Сказать, что, рассуждая аналогично, строим две сферы радиусами $r_1$ и $r_2$ и к ним общую касательную плоскость. (Но вопрос, как её строить, остаётся неразрешённым.)

2. Проведя сечение через центры данных сфер, сделать построение, как в планиметрической задаче, а затем через какую-то точку касания построить в пространстве ещё одну прямую, перпендикулярную радиусу,

проведённому в эту точку касания. Эта вторая прямая и построенная ранее касательная задают искомую плоскость.

Строя плоскость вторым способом, мы решаем задачу, опережающую **15.26**.

**15.40.** Посмотрим «в торец» (или построим соответствующую плоскость, рис. 71): $\angle ACO = \angle BCO$. Значит, линия содержится в биссекторе, $|OC| = \text{const}$. Следовательно, центр движется по прямой параллельно ребру жёлоба.

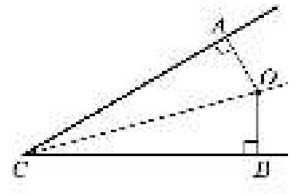



Рис. 71

## § 16. Опорная плоскость

Материал этого параграфа в школьной программе новый, но изложен именно на том уровне, который, с одной стороны, позволяет познакомить ученика с понятием «настоящей» геометрии, а с другой — интересен и доступен.

Отметим аналогии, сравнения, обобщения в пунктах 16.1 и 16.2, продолжающие развитие учеников. Параграф этот ставит задачи и перед учителем: пункт 16.3 почти не связан с предыдущим материалом, и учителю надо хорошо продумать систему вопросов, «наводящих мосты» между пунктами 16.1 и 16.2, с одной стороны, и пунктом 16.3 — с другой. Например: «Пространственная фигура ограничена. Сколько опорных плоскостей может быть у неё?», «У некоторой фигуры существуют такие опорные плоскости, которые, пересекаясь, ограничивают некий тетраэдр. Верно ли, что и сама фигура ограниченная?». И т. д.

Задачи к § 16 рассчитаны в основном на отработку введённых понятий. Каждый учитель продумает свои примеры и добавит вопросы. Несколько слов о задаче **16.9**. Она рассчитана на последовательное сравнение длин отрезков, соединяющих две точки треугольника (под треугольником понимается объединение трёх его сторон и внутренней области). Например, для треугольника $ABC$ (рис. 72) $|MN| < |PQ|$, $|PQ| < |BQ|$ или $|PQ| < |AQ|$, но $|BQ| < |BC|$, а $|AQ| < |AC|$ или $|AQ| < |AB|$.

В итоге диаметром треугольника может быть только его сторона (при другом расположении $M$ и $N$ в рассуждении принципиально ничего не меняется).

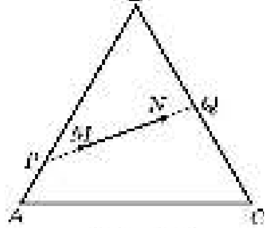



Рис. 72

Тема пункта 16.4 не так нова в школе, как остальные темы § 16, однако простые и полезные следствия из теоремы 16.1 и теорема 16.2 делают материал этого пункта необходимым для решения задач и доказательства теорем. Между тем раньше материал о выпуклых фигурах даже если и встречался в учебнике, то скорее играл роль интересного факта сам по себе.

## *Задачи к* § 16

**16.14.** Пусть фигура $F$ — невыпуклая. Это значит, что у неё есть две точки — $A$ и $B$, такие, что на отрезке $AB$ существует точка $C \notin F$. Возьмём точку $D \in F$. Тогда сечение фигуры $F$ плоскостью $(ABD)$ — невыпуклая фигура.

**16.21.** а) Может.

б) Не имеет. Пусть, например, центр одного шара радиусом $R_1$ находится на поверхности другого шара радиусом $R_2$ ($R_1 < R_2$). Из шара большего радиуса вынули общую часть этих шаров. Оставшаяся фигура является иллюстрацией к пунктам «а», «б».

**16.22.** Не больше одной. Доказывается хотя бы от противного.

**16.23.** Эти задачи, помимо всего, пропедевтика тем «Тела», «Граница тела».

## § 17. Цилиндры

Пункт 17.1 требует существенных комментариев.

1. Для доказательства утверждений этого пункта надо впервые основательно использовать понятие равенства фигур.

При прохождении главы I рекомендовалось не заниматься этим вопросом. Действительно, даже если им заняться в то время, то к моменту прохождения § 17 всё надо заучивать заново.

Поэтому мы рекомендуем начать прохождение § 17 с небольшой лекции-беседы на тему «Обобщение понятия равенства фигур». План её примерно таков:

1) Прежнее определение равенства фигур и его недостаточность.

2) «Перевод» прежнего правила равенства на «язык» расстояний. Попытка сформулировать новое правило. Проблема, связанная с употреблением предлогов «в» и «на» при отображении.

3) Выработка нового определения. Примеры, контрпримеры. Показ того, что прежнее правило — частный случай нового.

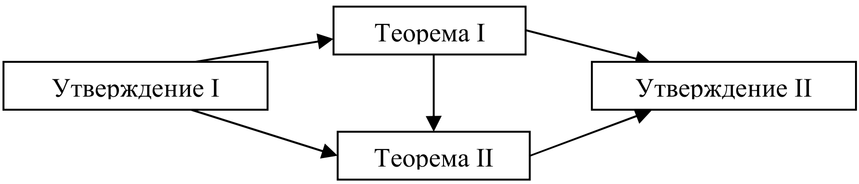
2. В связи со всем вышесказанным при доказательстве теоремы о равенстве оснований цилиндра необходимо чётко сформулировать, какое соответствие рассматривается, что на что и по какому правилу отображается.

3. Устройство пункта довольно сложное. В нём даются два определения цилиндра (одно — основное — в начале пункта, второе — в

конце), две теоремы (назовём условно первой теоремой теорему о вторых концах образующих, а второй теоремой теорему об основаниях цилиндра). Сложность состоит ещё в том, что именно эти утверждения (кроме одного) не выделены в тексте, а вот дополнительные моменты выделены. Поэтому полезно предложить учащимся самостоятельно построить схему связи утверждений пункта 17.1.

Назовём первое определение утверждением I, второе определение утверждением II.

Тогда схема выглядит так (стрелки показывают, что из чего следует):




(В схему не попали более мелкие определения и теоремы, например про высоту цилиндра.)

Если стрелки повернуть, то симметричная схема также логически возможна.

Успешно выполненная работа по выяснению плана-схемы и выводов из неё для пункта 17.1 (с включением и остальных деталей) есть критерий определённого уровня мыслительной культуры учащегося, его умения работать с печатным текстом.

## *Задачи к* § 17

**17.1.** Эта задача — первый пример применения пространственной теоремы Пифагора для проекций. Если же теорема не пройдена в том виде, который необходим для решения задачи **17.1**, то можно свести её к теореме о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда, построив такой параллелепипед (или вообще пока не решать задачу до прохождения темы «Векторы и метод координат» в 11 классе).

**17.2.** а) Обозначим цилиндр $C$ (рис. 73), круг нижнего основания $K$, плоскость, опорную к цилиндру, α, плоскость нижнего основания β, $C \cap \beta = K$, плоскость осевого сечения γ.

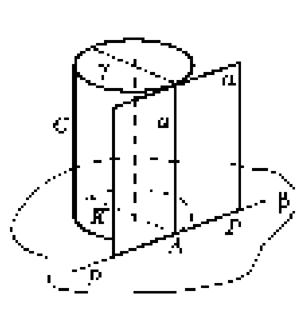


Рис. 73

Пусть $\alpha \cap \beta = p$. Тогда $p \cap K = (\alpha \cap \beta) \cap$ $\cap (C \cap \beta) = (\alpha \cap C) \cap \beta = a \cap \beta = A$, т. е. $p$ имеет с кругом единственную общую точку ($p$ — опорная прямая к основанию). Можно вести доказательство и от противного (техника решения различными способами освещена в задаче **15.1**).

б) $\alpha \perp \beta$ по признаку перпендикулярности плоскостей.

Важно подчеркнуть, что обратное утверждение

$\left.\begin{array}{l} \alpha \supset a \\ \alpha \perp \gamma \end{array}\right| \Rightarrow \alpha$ — опорная плоскость к цилиндру, — истинно и означает на самом деле теорему о существовании соответствующей опорной плоскости к прямому круговому цилиндру.

**17.3.** Из соображений симметрии ясно, что центр сферы — середина оси. Доказывается из равенства треугольников.

**17.4.** а) Снова для обоснования нужна задача-теорема **10.3**.

б) Для выражения искомого угла удобно воспользоваться формулой $\operatorname{tg} 2\alpha$.

**17.8, 17.9** — взаимно обратные задачи.

**17.10.** $|OC| = x$. а) $|AC| = |BC| = \sqrt{R^2 - x^2}$ (рис.74). Площадь сечения $S(x) = 2H\sqrt{R^2 - x^2}$. Периметр сечения $P(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2H$.

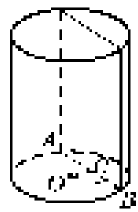


Рис. 74

б) Параллельное сечение с такой же площадью будет находиться от такого сечения на расстоянии $2x_0$, где $x_0$ — расстояние исходного сечения от оси. Пусть площадь сечения в два раза больше исходного. Выразим расстояние $x_1$ большего сечения от оси через расстояние $x_0$ исходного сечения от оси. Составим уравнение

$$2 \cdot 2H\sqrt{R^2 - x_0^2} = 2H\sqrt{R^2 - x_1^2} \Leftrightarrow 4R^2 - 4x_0^2 = R^2 - x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 4x_0^2 - 3R^2.$$

Из последнего равенства ясно, в частности, что задача имеет решение, если $x_0 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}R$ (геометрически это значит, что $AB$ удалена от $O$ не меньше, чем сторона правильного шестиугольника, вписанного в основание), и что $x_1 = \sqrt{4x_0^2 - 3R^2}$. Расстояние же между параллельными сечениями $x_0 + x_1$ или $x_0 - x_1$.

Аналогично разбирается случай для сечения, в два раза меньшего, чем исходное. Но тогда в этом случае решение есть всегда:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3R^2 + x_0^2}}{2}.$$

**17.11.** Задача аналогична задаче **17.10** (пункты «а» просто совпадают), только складываются и вычитаются не расстояния, а углы.

**17.13.** Ответ зависит от соотношения $d$ и $2R$. Если $d > 2R$, то ответ $d - 2R$. Если $d \leqslant 2R$, то ответ 0.

Отметим два важных момента.

1. Во всех трёх случаях задача в конце концов заменяется планиметрической.

2. Ответ одинаков, ибо во всех трёх случаях искомое расстояние можно свести к расстоянию между параллельными плоскостями, где лежат ближайшие точки цилиндров.

**17.17.** Определение несколько неудобно. Если быть формалистами, то надо всякий раз доказывать, что все общие точки поверхностей цилиндра и сферы образуют окружность. Возможно, кому-то больше понравится такое определение: «Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается его оснований, а с каждой образующей поверхности имеет единственную общую точку». Правда, в этом случае полезно решить отдельную задачу: «Доказать, что все общие точки образующих цилиндра и вписанной сферы образуют окружность».

**17.19.** Выкатить — значит предварительно положить набок, но для этого в какой-то момент бочка должна встать так, что диагональ её осевого сечения окажется перпендикулярной полу. Найдём длину диагонали: $d = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = \sqrt{4} = 2 > 1,9$. Значит, бочку выкатить из этого помещения нельзя.

## § 18. Конусы. Усечённые конусы

Материал этого параграфа удачно и последовательно изложен, обладает достаточной степенью общности. Дополнение к § 18 полезно, занимательно и может служить темой для индивидуального внеклассного чтения по предмету или математических семинаров (опять-таки во внеклассной работе). Как и перед темой «Цилиндры», необходимо посвятить 30—45 мин лекции-беседе на тему «Обобщение понятия «подобие фигур». План её аналогичен плану, сообщённому в комментариях к § 17 для равенства фигур.

### *Задачи к* § 18

**18.1.** Задача решена в пособии. Она важна для ученика методологическими выводами: для опровержения достаточно контрпримера, а для контрпримера (или примера, подводящего к решению) нередко полезно рассмотреть предельный случай.

**18.2.** Аналогична задаче **17.2**.

**18.3.** а) Это фактически задача **15.4**, но с другим сюжетом. Действительно, основания конусов являются сечениями шара, радиус которого — их общая образующая. Окружности этих сечений имеют единственную общую точку.

б) В этой задаче проще воспользоваться результатом задачи **18.2** (а именно обратным утверждением и способом построения опорной плоскости).

в) Вспомнить о задаче **15.1** и способах её решения.

Учитель может воспользоваться результатами названных задач, а может повторить рассуждения, проведённые в них, — всё зависит от того, какую цель он ставит перед собой и классом.

**18.4.** Эти задачи связаны соответственно с задачами **15.3** а и **15.3** б.

**18.5.** Замечания аналогичны замечаниям, сделанным к задаче **17.3**.

**18.10.** в) Пусть $\triangle APB$ — осевое сечение, $\angle APB = \varphi$, $\angle PDO = \alpha$ линейный для $\angle((PAC), (ABC))$ (рис. 75), $\angle APC = x$. Можно решить так: пусть $|AP| = a$, тогда

$$|PO| = a\cos\frac{\varphi}{2};\ \ |PD| = a\cos\frac{x}{2},$$

$$\sin PDO = \frac{|PO|}{|PD|} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$$

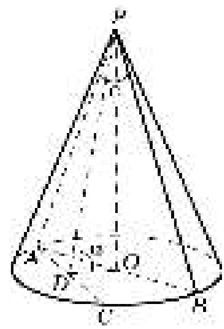


Рис. 75

Таким образом,

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha},\quad x = \arccos\frac{\cos^2\alpha + \cos\varphi}{\sin^2\alpha}.$$

А можно было воспользоваться задачей **14.2** (или формулой 14.6 из теоремы косинусов для трёхгранного угла).

Задачи **18.12**, **18.13** после проведения осевого сечения легко сводятся к планиметрическим.

Разберём, например, задачу **18.13**. Пусть $O_1$ и $O_2$ — центры соответственно первого и второго сечений, $P$ — вершина конуса. $\dfrac{|PO_1|}{H} = \dfrac{\sqrt{S_1}}{R\sqrt{\pi}}$, тогда $|PO_1| = \dfrac{H\sqrt{S_1}}{R\sqrt{\pi}}$.

Аналогично $|PO_2| = \dfrac{H\sqrt{S_2}}{R\sqrt{\pi}}$, тогда

$$|O_1O_2| = H\frac{\left|\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right|}{R\sqrt{\pi}}.$$

Во второй части задачи достраиваем усечённый конус до полного, находим его высоту и ищем расстояние между сечениями.

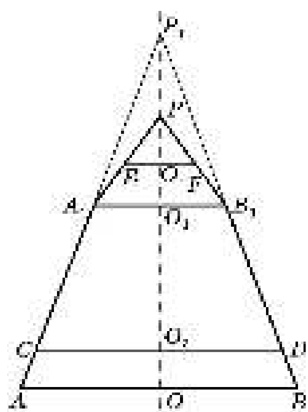


Рис. 76

**18.15.** Рассмотрим осевое сечение данной конструкции $AA_1PB_1B$ (рис. 76).

Пусть $|AO| = R$ — радиус нижнего основания усечённого конуса, $|A_1O_1| = R_1$ — радиус верхнего основания и одновременно радиус основания данного полного конуса.

1-й с л у ч а й. Плоскость пересекает полный конус. Пусть в осевом сечении след сечения этой плоскостью $EF$. $|O_1O_4| = x$, $|PO_1| = H$. Тогда

$$\left(\frac{H-x}{H}\right)^2 = \frac{S(x)}{\pi R_1^2}, \quad S(x) = \pi R_1^2 \frac{(H-x)^2}{H^2}. \tag{1}$$

2-й с л у ч а й. Плоскость пересекает усечённый конус. Пусть в осевом сечении след сечения этой плоскостью $CD$. $|O_1O_3| = x$, $|O_1O| = h$. Продолжив $AA_1$ и $BB_1$ до пересечения в точке $P_1$ и рассмотрев подобие треугольников $A_1P_1B_1$ и $AP_1B$, находим $|P_1O_1| = \dfrac{R_1h}{R-R_1}$, а затем из теоремы о сечении конуса плоскостью, параллельной плоскости его основания,

$$S(x) = \pi R_1^2 \left(\frac{hR_1 + xR - xR_1}{hR_1}\right)^2. \tag{2}$$

Осталось написать ответ. Однако здесь ученик впервые в школьной геометрии встречается с кусочным заданием функции. Конечно, ответ можно дать описательно: «Если откладывать $x$ вверх от общего основания, то ответ (1), а если — вниз, то ответ (2)». Но хотелось бы, чтобы эта задача стала образцом для решения подобных задач в геометрии (тем более что в алгебре это уже пройденный этап). Кроме того, учитель может использовать эту задачу для проведения пропедевтической работы по отношению к теме «Метод координат».

Поэтому предлагается сделать следующее: ввести координатную прямую ($OP$), взяв за начало отсчёта $O_1$, а направление отсчёта — от $O_1$ к $P$. Тогда о т в е т выглядит следующим образом:

$$S(x) = \begin{cases} \pi R_1^2 \dfrac{(H-x)^2}{H^2} \text{ при } x \in [0;\ H], \\ \pi R_1^2 \left(\dfrac{hR_1 - xR + xR_1}{hR_1}\right)^2 \text{ при } x \in [-H;\ 0]. \end{cases}$$

**18.16.** Опять функция с кусочным заданием.

**18.20.** Можно предложить несколько путей решения.

1. Аналитический. Пусть $P$, $R$, $H$ соответственно вершина, радиус основания и высота конуса, $S$ — площадь исследуемого сечения, $x$ — расстояние от $P$ до сечения. Тогда $\dfrac{x^2}{H^2} = \dfrac{S_{\text{сеч}}}{\pi R^2}$. По условию $\dfrac{x^2}{H^2} = \dfrac{RH}{\pi R^2}$, откуда $x = \sqrt{\dfrac{H^3}{\pi R}}$.

Для того чтобы такое сечение существовало, необходимо и достаточно, чтобы

$$x \leqslant H, \text{ т. е. } \sqrt{\frac{H^3}{\pi R}} \leqslant H \Leftrightarrow H \leqslant \pi R.$$

О т в е т: не в каждом, а в таком, где высота $H \leqslant \pi R$ (длина полуокружности основания).

2. Из соображений непрерывности площадь сечения меняется от площади основания до 0. Значит, для того чтобы такое сечение нашлось, необходимо, чтобы площадь основания была не меньше площади осевого сечения. Первая равна $R \cdot \pi R$, вторая равна $R \cdot H$. Из сравнения получаем, что должно быть $\pi R \geqslant H$, что выполняется не всегда.

О т в е т: не в каждом конусе.

3. И наконец, если действовать формально, достаточно взять конкретный контрпример (попробуем $R = 2$, $H = 8$) и показать, что для такого конуса необходимого сечения не существует.

## § 19. Тела

Этот параграф уже анализировался во Введении. Он весь — яркая демонстрация методологических, методических и педагогических установок авторов. Пункт 20.1: наблюдения, осознание, а потому и некоторое обобщение на уровне житейского опыта. Учителю (даже больше, чем ученику) следует обратить внимание на фразу: «Геометрическим телом называется часть пространства, занимаемая физическим телом» — и продумать смысл, вкладываемый в неё. Пункт 20.2 даёт необходимые предварительные определения, а пункт 20.3 — само определение геометрического тела. Приложение этой теории произойдёт в задачах и в теме «Многогранники» (11 класс). Однако логика рассуждения повторится ещё раз в пункте 20.4, где вводится понятие замкнутой области на плоскости, и учитель вправе рассматривать пункт 20.4 как некое закрепление, проверку усвоения пунктов 20.1—20.3. А задачи, формулируемые в конце пункта 20.4, требуют умения учащихся самостоятельно работать с определением.

### *Задачи к* § 19

**19.2.** Центр описанного около правильной пирамиды $PABC$ шара лежит на луче $PQ$, где $Q$ — центр основания $ABC$ (этот вопрос неоднократно разбирался, начиная с задачи **7.4**). Вопрос же данной задачи сводится к тому, чтобы узнать условие, при котором центр описанного около пирамиды $PABC$ шара принадлежит отрезку $PQ$ или находится вне его (рис. 77).

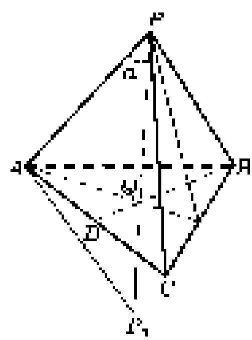


Рис. 77

1. Проведём сечение конструкции плоскостью $APQ$. Пусть $PP_1$ — диаметр, тогда $\angle PAP_1$ — прямой. Обозначим $|AP| = l$. Если $BD$ — медиана основания, то

$$|AD| = l\sin\frac{\alpha}{2}, \ |AQ| = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Тогда из $\triangle AQP$ имеем

$$|PQ|^2 = H^2 = l^2\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \ldots = l^2\frac{1+2\cos\alpha}{3}, \ H = l\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}.$$

2. Из $\triangle PAP_1$ по теореме о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике

$$l^2 = |PP_1| \cdot H, \ |PP_1| = \frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{1+2\cos\alpha}}.$$

Тогда $R = \dfrac{l\sqrt{3}}{2\sqrt{1+2\cos\alpha}}$.

3. Выясним, например, при каком условии центр шара — вне пирамиды:

$$R - |PQ| > 0 \Leftrightarrow \frac{l\sqrt{3}}{2\sqrt{1+\cos\alpha}} - l\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}} > 0.$$

Учитывая, что $\cos\alpha > 0$, из последнего неравенства получаем ответ.

**19.3.** в) Например, пространство, из которого «вынут» треугольник.

**19.5.** а) Нет (обратное — да). б) Да (обратное — нет).

Причина неправильности утверждений — невыполнение свойства 1 в определении тела. Для выпуклого тела обратное утверждение верно.

**19.9.** а) Это точка пересечения прямой, перпендикулярной ($ABB_1$) в середине диагонали грани $AB_1$, и прямой, перпендикулярной ($DBB_1$) в середине диагонали куба $B_1D$. Наглядно видно (а можно и посчитать), что эта точка — внутри куба.

б) $X$ — вне куба.

**19.13.** Ответ на первый вопрос — точка внутри куба (доказывается хотя бы от противного).

Второй вопрос следует понимать так. Вершины куба выбираются наугад. Про сколько случайно выбранных вершин мы должны знать, что расстояние от них до некоторой точки меньше длины ребра куба, чтобы иметь право сделать вывод: «Эта точка внутри куба»?

Для ответа на этот вопрос выясним предварительно, сколько хватит специально подобранных вершин куба, чтобы выполнялось условие задачи. Очевидно, достаточно двух (концы одной диагонали). Но для того чтобы быть уверенным, что среди выбранных вершин есть концы одной диагонали, достаточно выбрать пять вершин куба. Это и есть ответ.

* * *

Сделаем некоторые выводы.

1. Глава IV знакомила учеников с элементами топологии. Тело, граница, поверхность, выпуклость — эти понятия впервые так полно и достойно вошли в курс школьной геометрии. Ученики должны иметь хорошее представление об этих вопросах, однако лишь настолько, чтобы впоследствии грамотно оперировать нужными словами. Ни в коем случае не хотелось бы превращать материал главы в очередную порцию математических утверждений для зазубривания.

2. В этой главе продолжались и утверждались приёмы решения задач, завершались цепочки задач, показаны новые моменты (например, решение задачи **15.1**).

3. В теории, а более того, в задачах этой главы существовали постоянная связь, аналогия, обобщение соответствующих фактов из планиметрии.

4. Глава IV в некотором смысле пограничная. Это ещё 10 класс, но разговор идёт уже о геометрических телах. Это и «полигон» для применения предыдущего материала, и заготовки для 11 класса.

## *План прохождения главы* **IV**[1]

| № урока | Тема и её содержание | Повторение | Примечания |
|---|---|---|---|
| 1, 2<br><br><br><br>3 | Сфера, шар. Их взаимное положение с плоскостью. Изображение шара<br>Плоскость, касательная к шару | Окружность, круг и соответствующие теоремы о них | Связь с алгеброй (исследование функции)<br><br>Связь с черчением, географией, астрономией |
| 4<br><br><br>5<br><br>6, 7<br><br>8<br>9 | Шар и расстояние от точки до фигуры<br>Упражнения по теме «Шар и сфера»<br>Опорная плоскость и диаметр фигуры<br>Упражнения<br>Упражнения. Работа самопроверки<br>Понятие о выпуклой фигуре | Окружность, вписанные и описанные около неё многоугольники. Свойства таких многоугольников | |

[1] Число уроков, отведённых на изучение главы, уменьшено, так как последняя неделя отдаётся под переводные экзамены.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | Зачётная контрольная работа «Сфера и шар» | | Включить задачу на вписанный и описанный шары |
| 11, 12 | Обобщение понятия «равенство фигур». Цилиндр общего вида, прямой круговой цилиндр | Равенство треугольников. Сфера и шар | |
| 13, 14 | Упражнения на цилиндр. Самостоятельная работа | Подобие | Индивидуальные задания: центральное проектирование, конические сечения (для желающих) |
| 15, 16 | Обобщение понятия «подобие фигур». Конус общего вида. Свойства. Виды. Усечённый конус | Цилиндры | |
| 17, 18 | Упражнения на конус | Вписанные и описанные многоугольники и их свойства | |
| 19, 20 | Упражнения на цилиндр и конус. Проверочная работа | Цилиндры и конусы | |
| 21—23 | Тело и его граница. Упражнения | Цилиндры и конусы | |
| 24 | Зачётная контрольная работа | | |

## *Из дидактического материала к главе* IV

### ***Работа самопроверки*** (урок № 9)

1. Можно ли для данного круга подобрать шар, для которого этот круг — сечение? Если нет, то почему; если да, то как и сколько?

2. Вершины параллелограмма со сторонами 5 и 6 лежат на сфере. Можно ли найти диагонали параллелограмма? Если да, то чему они равны; если нет, то почему?

3. Нарисуйте правильную четырёхгранную пирамиду, вписанную в сферу, и сечение этой сферы плоскостью основания пирамиды.

4. Можно ли около тетраэдра (необязательно правильного) описать сферу? Предлагается три о т в е т а: 1) Всегда да. 2) Всегда нет. 3) Когда как. Выбрать ответ и объяснить.

### ***Зачётная контрольная работа*** (урок № 10)

I в а р и а н т

1. Дан шар радиусом $R$. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом 30° к первой. Найти площадь сечения.

2. Доказать, что около прямоугольного параллелепипеда можно описать сферу.

3. Дана плоская фигура с диаметром 1. Доказать, что она может быть заключена в прямоугольник, площадь которого не больше 1.

II вариант

1. Через точку, лежащую на поверхности шара, проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по кругам радиусами $r_1$ и $r_2$. Найти радиус $R$ шара.

2. Доказать, что если основание пирамиды — прямоугольник, то около неё можно описать сферу.

3. Может ли фигура иметь два параллельных диаметра?

***Проверочная работа*** (урок № 20)

I вариант

1. Задача **18.8**.

2. Задача **19.14** а.

3. Около прямого кругового конуса описана сфера. Изобразите это на рисунке.

II вариант

1. Задача **18.9**.

2. Задача **19.10** а.

3. В прямой круговой цилиндр вписана сфера. Изобразите это на рисунке.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## I. ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

1. Книга «Углублённое изучение геометрии в 10 классе» имеет несколько непривычный характер. Её нельзя с полным правом назвать методическими рекомендациями для учителей, ибо в большей части методические советы — это не только общие соображения, но и конкретный опыт работы автора. Поэтому вместо обтекаемого местоимения «мы», вместо безликих слов «хочется сказать», «кажется интересным» и т. д. часто хотелось употребить жёсткие «из опыта моей работы», «я не нашел пока другого решения» и т. д., чтобы взять на себя ответственность за возможные субъективные недоработки.

Но назвать эту книгу «Из опыта работы» тоже неверно. В ней рассказано о работе по конкретному учебнику, высказаны общие советы, поднят ряд методических проблем, выходящих за пределы опыта одного учителя. Насколько это полезно, насколько получилось, судить читателю. Но представляется, что у ряда учителей вызвала недоумение и желание разобраться группа задач из учебника, которую можно назвать «Задачи с практическим содержанием». Эти задачи находятся в учебнике в рубрике «Прикладная геометрия». Им и посвящается первая часть данного Приложения.

2. Общим местом в рассуждениях о цели школьного обучения стала фраза: «Школа готовит к жизни». Поговорим об одной из конкретизаций этого тезиса. Воспитательно-педагогическое значение математики шире, чем это можно себе представить. Математика не только позволяет накапливать информацию для будущего использования, не только «ум в порядок приводит». Сама доказательность её, если так можно выразиться, «математическая порядочность» не менее важна, чем эмоциональный настрой, возникающий на хороших (но тоже не столь, кстати, частых) гуманитарных уроках. А атмосфера творчества, сочетания индивидуального поиска и коллективного достижения истины, удовлетворённость от достигнутого результата мотивируют бескорыстный интерес к математике и т. д.

Изучение математики ради математики, изучение одного из инструментов познания как такового — занятие интересное, но не для многих. Вот понять бы, как он работает, научиться бы прикладывать его к действительности! Но, к сожалению, некоторые учителя отмахиваются от вопроса ученика: «Для чего мы это учим?» — или обещают ответ в туманном будущем. Да и пытаясь ответить на этот вопрос, учитель часто говорит: «Это применяется здесь, а такое — там, это важно для такой отрасли знаний». И т. д. При таком ответе ученик ставится (в который раз!) в положение пассивного получателя информации. Такие разговоры между учителем и учеником, конечно, нужны. Но ведь хочется учиться применять свои знания, понять, в чём такое применение состоит. Для этого (в понимании авторов) в учебнике и рассматриваются задачи с практическим содержанием.

3. Для уяснения позиции авторов рассмотрим своеобразный контрпример. «Бригаде землекопов (силосозаготовителей, экскаватору и т. д.) надо вырыть яму в форме прямоугольного параллелепипеда. Даны размеры. Сколько кубометров земли надо вынуть? (Или «какова оплата?», если составитель хочет «подключить» ещё и материальную заинтересованность)» Нужны ли такие задачи? Без сомнения! Но назвать их задачами с практическим содержанием можно с большой натяжкой. Главный недостаток подобной задачи — в ней заранее дана математическая модель для решения. Между тем жизненная практика, предлагая свои задачи, не формулирует их тему, а средства решения берутся из ограниченного запаса знаний данного ученика. Ученик (а потом и взрослый человек) должен сам переформулировать задачу на языке той науки, знание которой (как он считает) здесь необходимо, создать модель (в нашем случае математическую), выяснить, насколько она соответствует реальному явлению, уточнить модель и, даже уточнив, понимать, что решение приближённое, модель не единственно возможная, и т. д. Очевидно, если мы хотим настроить ученика на подобного рода практическую деятельность в будущем, нужно сейчас предлагать ему соответствующие задачи. Выше при комментировании задачи **12.48** была сказана всего одна фраза: «В задаче фактически надо найти высоту тетраэдра, зная его рёбра». Но чтобы дойти до этого вывода, ученики должны изрядно потрудиться, и было бы методической ошибкой учителя нарисовать сразу «картинку» и (экономя время) сказать: «Итак, ребята, мы видим: задача сводится...» Именно такие задачи под названием «Задачи с практическим содержанием» и пытались подобрать, создать для учебника авторы.

4. С такой постановкой вопроса **для учеников** многие учителя согласятся. А как быть учителю? Ведь, по мнению многих, учитель лишь «подзуживает» учеников, а сам ответы уже должен знать. Вот это спорный вопрос! Более того, даже зная решение, полезнее вести класс к решению задачи вообще, а не к конкретному способу решения. Задачи с практическим содержанием рассчитаны на доверительный, раскованный разговор учеников между собой и с учителем. Ведь каждое мнение — уточнение прежней модели или подход к новой; каждое слово уважаемо не только из правил вежливости, а потому, что нередко **нет** ещё решения проблемы, нет эталона у самого учителя, а иногда и в науке.

— Ну, пусть, — скажет учитель, устав спорить. — А сами авторы предполагали какой-то ответ? Что они хотели?

Да они именно этого и хотели: поставить ученика в условия, приближённые к реальным, развязать его выдумку, снять скованность эталонами, алгоритмами и т. д.!

Ниже будут разобраны решения некоторых таких задач, и нередко это будут решения учеников. Надо понимать, что даже если решение имеет окончательный вид, алгоритмизировано, можно иногда найти другие варианты решения, что-то усложнить, изменив условие задачи (см., например, задачу **18.1** со слов: «Условие этой реальной задачи можно усложнить (самим!)»).

5. Тогда у некоторых учителей возникает вопрос: так что же, прежние задачи отменяются? Конечно, нет! Анализируемые задачи, которые можно было бы также назвать «задачи на практическую сметку» или «вопросы на элементы инженерного мышления», — одна из новых форм связи школьной математики с жизнью — не замена, а дополнение! Создать **систему** таких заданий — работа неимоверно трудная. Мы должны быть благодарны авторам за их первые усилия в этом направлении. Что же касается учителя, то ему выбирать, решать ли эти задачи, игнорировать ли их, помогать ли авторам, высказывая своё мнение и присылая свои задачи.

6. Хотелось бы подчеркнуть, что понимание термина «связь математики с жизнью», на которое опирается это приложение, и термина «задачи с практическим содержанием» неоригинально. Эти термины в разной степени общности сформулированы в статьях, помещённых в журнале «Математика в школе» в последние годы, и в трудах А. Я. Хинчина.

7. Попытаемся дать краткий обзор задач с практическим содержанием, помещённых в учебнике.

Уже отмечалось, что создание системы таких задач — дело будущего. Во всех этих задачах требуется самостоятельное создание математической модели ситуации, но цели их и смежные вопросы разные. Используя последнее, можно наметить некие группы таких задач учебника.

I. Геометрия в связи с разными отраслями знаний:

а) геометрия и геометрия;

б) геометрия и алгебра с анализом;

в) геометрия и физика с астрономией.

II. Геометрия и квазижитейские ситуации:

а) задачи со сформулированным отличием от реальных условий;

б) математическое обоснование житейски привычных ситуаций (умение удивиться, критически подойти к привычному);

в) практическая сметка, сообразительность;

г) конструирование (чаще мысленное).

Разобрав примеры решений задач из каждого раздела, приведём и просто образцы ученических работ на эту тему.

Конечно, план этот можно дополнить. Некоторые задачи относятся к нескольким разделам, а некоторые, наоборот, не будут названы (сюда, например, относятся многие задачи на наблюдение, конструирование примеров и контрпримеров — хотя бы из § 16 и т. д.). Но подчеркнём ещё раз: систематизация задач с практическим содержанием пока преждевременна!

I. а) К задачам этой группы относятся: **12.20**, **12.48**, **18.11**, **18.23**, **18.24**, **IV.28** и др.

**12.20.** 1. Измерив рёбра $AP$, $PB$, $AB$ (рис. 78), вычисляем высоту $\triangle APB$, а затем и $|FB|$.

2. Если $PO$ — высота тетраэдра, то $BFOC$ — прямоугольник, $|OC| = |FB|$. Дальнейшее очевидно.

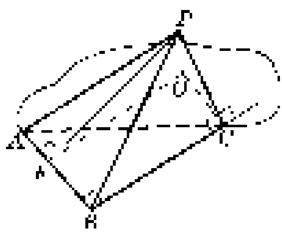


Рис. 78

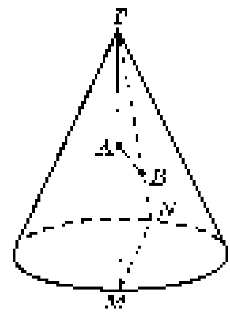


Рис. 79

**18.11.** 1. Проведём и измерим образующие $PM$ и $PN$ (рис. 79). Из $\triangle PMN$ найдём $\angle MPN$.

2. Измерим $PA$ и $PB$. Найдём $|AB|$ по теореме косинусов.

**18.24.** На самом деле это стандартная задача о нахождении высоты (или длины отрезка, к которому нельзя подойти, разбираемая в предыдущих классах). Только сейчас она применяется несколько раз: для нахождения высоты конуса и радиуса его основания. Конечно, решая эту задачу полезно вспомнить, какие приборы для измерения на местности известны ученикам.

А вот несколько недоработанных, но интересных идей:

1. Набрасывать массивные кольца на конус. Зная диаметр кольца и длину верёвки от кольца до измерителя, подсчитать параметры конуса.

2. Пустить луч в осевом сечении конуса, засечь, куда он отразится, и, пользуясь законами отражения света, узнать угол наклона образующей к высоте (к основанию) и через него остальное.

**IV.28.** «Снять» циркулем длины трёх сторон треугольника (три хорды), вписанных в окружность, и найти радиус описанной около треугольника окружности. Для нахождения радиуса сферы взять на ней четыре точки так, чтобы это были вершины тетраэдра, и вычислить радиус описанной около него сферы.

I. б) Этот раздел включает в себя многочисленные задачи, где применяется производная, где проявляют себя в различных «ипостасях» непрерывность, алгебраические методы решения и опровержения.

Интересно отметить задачи **III.12**, **III.13**. В них вводится и «работает» некий аналог понятия «предел» в математическом анализе.

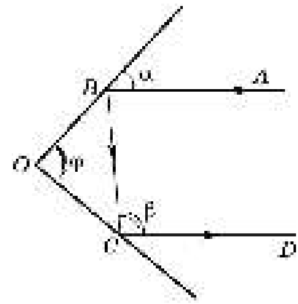


Рис. 80

В этом смысле задача **III.12** — аналогия теоремы о единственности предела. Рассмотрим её доказательство. Пусть луч $OX$ — переменный, а лучи $OA$ и $OB$ — предельные для него. Тогда $\angle AOB = \text{const} = \varphi$, а углы $XOA$, $XOB$ можно сделать сколь угодно малыми, в частности равными, например, $\dfrac{\varphi}{3}$. Но тогда сумма двух плоских углов трёхгранного угла $OABX$ окажется меньше третьего. Противоречие. Значит, предельных лучей не более одного.

I. в) К задачам этой группы относятся **8.20**, **12.49**, **14.24**, **14.52**, **III.18**, **18.25**, **IV.32** и др.

**14.24.** Посмотрим «в торец» (рис. 80), т. е. рассмотрим плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла:

$$\beta = 2\alpha + 2\varphi - 180^\circ,\ \angle ABC + \beta = 180^\circ,$$

отсюда $\varphi = 90^\circ$.

Важно подчеркнуть использование здесь двух законов отражения (оптика).

**IV.32.** Тех, кого интересуют полное решение этого вопроса и история его решения (начиная с Декарта), отсылаем к книге Л. В. Тарасова и А. Н. Тарасовой «Беседы о преломлении света» (18-й выпуск библиотечки «Квант»).

II. а) Моделируя явление, мы отвлекаемся от тех его сторон, которые считаем несущественными, или заменяем их более простыми. В этом смысле на начальном этапе ценность представляют задачи, где такое упрощение уже сделано и используется. В задаче **12.50** считается постоянной высота, при решении многих задач (а некоторые из них будут цитироваться ниже) ученики пишут сами: «Примем такие-то условности...», «Договоримся о том-то...».

К таким же задачам относится, наверное, и задача **14.52**.

II. б) О необходимости иметь «уменье удивляться» поставлены фильмы, написаны песни. Эмоционально-педагогическое значение таких моментов в геометрии трудно преувеличить. И авторы пользуются ими в задачах **10.33**, **15.39**, **16.14**, **IV.32** и др.

**10.33.** Здесь схематично изображены ко́злы (рис. 81):

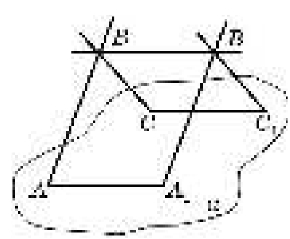


Рис. 81

$$\left.\begin{array}{r}|AB| = |A_1B_1| \\ AB \parallel A_1B_1\end{array}\right| \Rightarrow ABB_1A_1 \text{ (параллелограмм).}$$

Тогда $(BB_1) \parallel (AA_1)$, $(BB_1) \parallel \alpha$, $(BB_1)$ — горизонтальна.

**15.39.** Приведём некоторые мнения, взятые из ученических работ.

1. Наиболее естественная форма для объекта, расширяемого воздухом, шар.

2. Нужна правильная форма — центр тяжести, симметричность. Ему «всё равно», как падать: он отскочит одинаково.

3. Шар с плоскостью имеют одну общую точку. Шар имеет наиболее удобную форму для перекатывания. Трение качения меньше трения скольжения.

4. Выгодная обтекаемая форма для полёта в воздухе.

5. Нет выступов на мяче — игрока не ударит.

6. Меньше тратится материала, так как при данном объёме у шара наименьшая площадь поверхности по сравнению с другими телами.

**16.14.** К этим задачам можно подходить по-разному: 1. Для каждого тела разработать методику проверки. 2. Придумать общий подход, используя, например, утверждение, что около граней предлагаемых тел можно описать окружность.

II. в) Каждому учителю в его конкретной работе встречались ученики, которые хорошо усваивали общие приёмы, алгоритмы решения, но терялись при решении нестандартной или нестандартно сформулированной задачи. И вина здесь далеко не всегда ученическая. Надо ставить ученика в такие ситуации, учить его выходить из них. Вот, например:

**13.12.** У параллелепипеда, который получается из двух одинаковых спичечных коробков, измерения $a$, $b$, $2c$ (где $a$, $b$, $c$ — измерения спичечного коробка). Значит, диагональ

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}\ .$$

Для того чтобы она была наибольшей из возможных, надо, очевидно, удвоить наибольшее из измерений данного коробка. Отсюда — ответ на вопрос задачи.

**13.13.** Обведём дно спичечного коробка (а может, только две смежные стороны) в плоскости, на которой он лежит. Пусть коробок $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а обведён угол $ABC$ (рис. 82). Отведём коробок. Проведём $AC$. В точке $C$ в той же плоскости проведём перпендикуляр к $AC$, длина которого равна $|CC_1|$. (Это можно сделать, например, приложив коробок боковой гранью к $AC$.) Соединим конец этого перпендикуляра (точку $F$) с точкой $A$. $|AF|$ — искомая длина диагонали. Действительно,

$$|AF|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CC_1|^2.$$

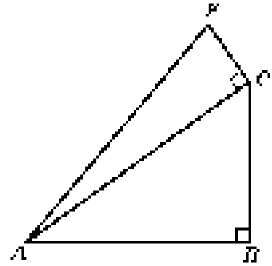


Рис. 82

**IV. 28.** Вот решение этой задачи учеником А. Т.:

I с п о с о б.

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{V}{\pi}}.$$

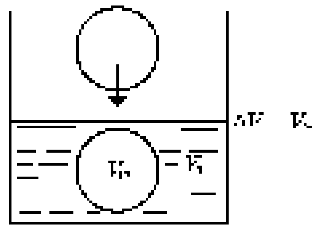


Рис. 83

Имеющийся шар опускаем в градуированный цилиндр с водой (рис. 83). Если шар полностью утонет, то, посмотрев по шкале, можно узнать объём шара, а по нему и радиус.

II с п о с о б. Идея, лежащая в основе этого способа, изображена на рисунке 84. Шар, лежащий в жёлобе, касается его стенок двумя точками. Если провести сечение плоскостью α, проходящей через точки касания шара с жёлобом и перпендикулярной ребру жёлоба, то получится рисунок 84, *в*.

Из треугольника *ABC* получаем

$$\sin\alpha = \frac{r}{r+a}, \quad r = \frac{a\sin\alpha}{1-\sin\alpha}, \text{ т. е. } r = k \cdot a,$$

где $k$ — постоянный коэффициент для данного жёлоба, $a$ — расстояние от ребра жёлоба до шара.

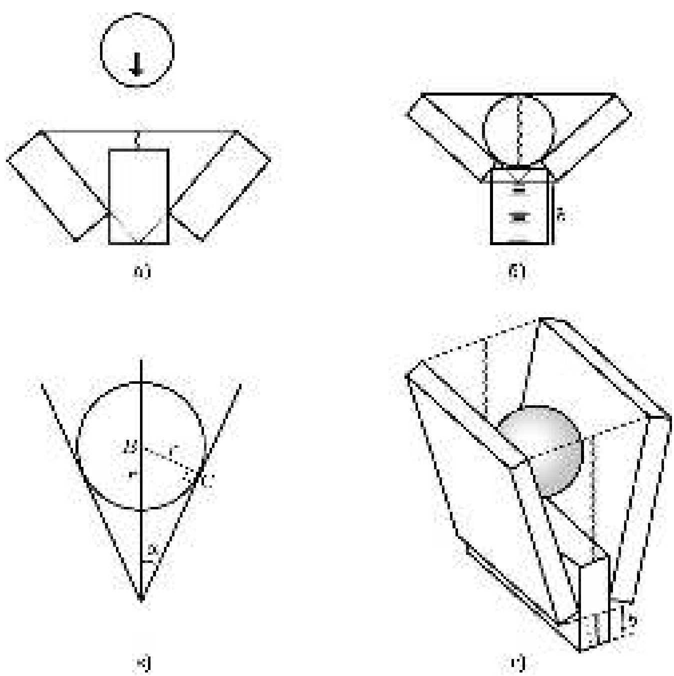


Рис. 84

На рисунке 84, *г* показан внешний вид установки, на рисунке 84, *а* и на рисунке 84, *б* показан принцип её действия.

Однако у этой установки есть недостаток: в ней задействована пружина, т. е. шар должен обладать определённой массой, чтобы её растянуть (в противном случае см. следующий способ).

III способ. Идея, лежащая в основе этого способа, изображена на рисунке 85, *г*. Площадь треугольника $ABC$ равна: $S = \frac{a+b+c}{2}r$, но, с другой стороны,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{или} \quad r = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c}.$$

На рисунке 85, *б* показан внешний вид установки. Для устойчивого положения шара использованы два жёлоба, сконструированные из четырёх реек (на рис. 85, *в* — вид сверху). В месте соединения реек (точка $A$, на рис. 85, *а*) прикрепляется ломаная из трёх звеньев (наподобие складного метра). Сторона $AB$ фиксирована и имеет определённую длину, две другие стороны произвольные. Обхватив шар этими тремя звеньями, мы получим ситуацию, как на рисунке 85, *г*.

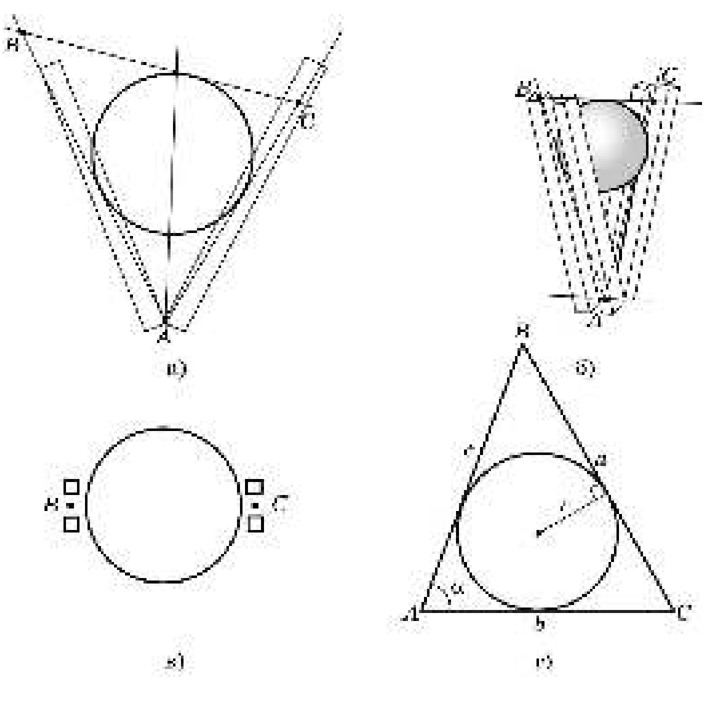


Рис. 85

Но у этой установки есть недостатки: толщина звеньев вносит поправки в длину сторон, люфт системы приводит к неправильным показаниям и т. д. Поэтому лучшим этот способ считать нельзя.

IV с п о с о б. Идея этого способа изображена на рисунке 86, *а*. Наибольшее расстояние между точками окружности — это диаметр, касательные в данных точках параллельны. Если провести прямую аналогию между стереометрией и планиметрией, то можно сразу перейти к установке (рис. 86, *б*), т. е. если $\alpha \parallel \beta$, то приблизим $\alpha$ к $\beta$ до того момента, когда шар будет касаться обеих плоскостей, а расстояние между плоскостями будет равно диаметру шара. Тогда если $h$ — расстояние между $\alpha$ и $\beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$ и $A$, $B \in \gamma$ (где $\gamma$ — сфера), то $|AB| = h = d$.

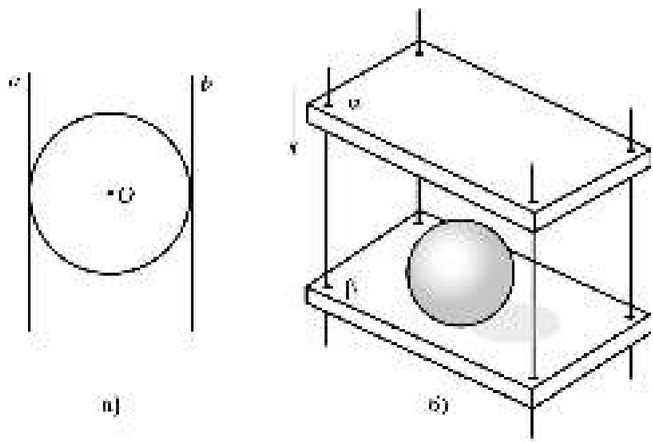


Рис. 86

К такого же типа задачам относится задача **17.20** и др. Проста и интересна задача **14.50**, начальный толчок к решению которой может дать наблюдение над кубом $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где сечение $A_1BC_1$ — правильный треугольник, а проекции его на грани — прямоугольные треугольники.

II. г) Умения конструировать примеры, контрпримеры, мысленные объекты, выдвигать идеи приборов, опытов — важные качества, которые, чего греха таить, чаще школой заглушаются, чем развиваются. Нет спору, эрудиция учащихся не всегда достаточна, экономический расчёт им незнаком, идеи трудоёмки для исполнения или просто невыполнимы. А вот амбиция и неудержимый полёт фантазии грозят вообще разрывом с реальностью. Но всё вышесказанное не повод (и не причина) для равнодушия к этой стороне мыслительной деятельности учеников (а иногда, к сожалению, и борьбе с ней). Более того, необходимо развивать их и в этом направлении. В учебнике на эту тему есть задачи **14.53**, **18.23**, **19.8**, **IV.30** и т. д.

**14.53.** Познакомимся с одной из ученических идей. На горизонтальную отполированную площадку α помещается исследуемый кристалл. Он освещается параллельным пучком света из источника. Направление пучка можно менять и фиксировать хотя бы величиной двух углов отклонения луча от двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Отражённый пучок улавливается детектором Д, который также фиксирует аналогичные два угла, и по этим двум парам углов находим пару углов, задающих биссектрису угла между прямым и отражённым пучками. Эта биссектриса — нормаль к одной из граней. Аналогично ищутся нормали к другим граням, а угол между плоскостями равен углу между перпендикулярными к ним прямыми и т. д.

**IV.30.** Длина планки *AB* фиксирована, например, *a* (рис. 87). Она может передвигаться по направляющим *MC* и *ND*, на которых отмечены расстояния $|CA| = |BD|$. Зная *a*, измерив $|AC|$ (стрелка сегмента), находим радиус.

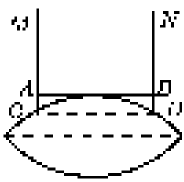


Рис. 87

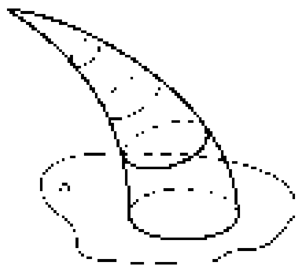


Рис. 88

**19.8.** Пример конструирования объекта по его свойствам. Сообщаем лишь о т в е т: это тело, формой напоминающее рог (рис. 88).

В заключение приведём ещё несколько ученических работ, посвящённых решению задач с практическим содержанием (**18.25**, **12.49**). Эти работы приводятся почти дословно. Но их непосредственность и наивная иногда безграмотность соседствуют с хорошей эрудицией и показывают умение думать.

**18.25.** Ученик В. Л.

Какую линию описывает на земле тень от верхнего конца вертикально воткнутой в землю палочки в течение дня?

Принятые при решении допущения:

а) Палочка достаточно мала, чтобы считать, что её тень падает не на сферу, а на плоскость.

б) За один оборот вокруг своей оси (за сутки) Земля поворачивается вокруг Солнца на пренебрежимо малое расстояние (для данного случая).

в) Земля круглая.

г) На Земле нет атмосферы (не рассеивается свет).

Задача разбита на две части:

1. Выяснение, по какой линии движется Солнце относительно терминатора (линии, разделяющей день и ночь).

2. Выяснение ответа на вопрос задачи.

Ч а с т ь 1. У нас имеется такое расположение (рис. 89): *S* — точка, где сходятся лучи от краёв Солнца, касающиеся Земли (эта точка примечательна тем, что если двигаться от Земли по прямой к ней, то до неё Солнца не видно, а после неё Земля закрывает лишь центральные области солнечного диска). *AB* — проекция терминатора (линии, разделяющей день и ночь) на плоскость листа. *CD* — проекция траектории перемещения объекта в процессе вращения Земли на плоскость листа. Из приведённого рисунка видно, что тень — это центральная, а не параллельная, как принято думать, проекция, причём центр её — точка *S*.

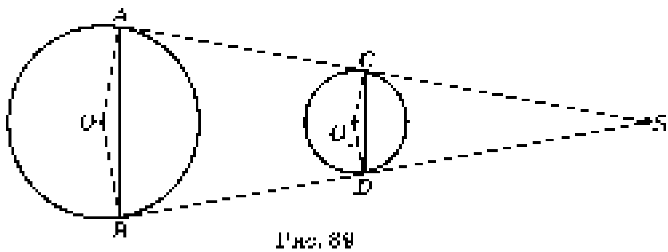



Рис. 89

Из этого видно, что Солнце в данном случае можно представить себе как бесконечное множество точечных лучевых источников света, лучи от которых сходятся в точке *S*, или в виде аналогичной излучающей плоскости, перпендикулярной линии Земля — Солнце и параллельной терминальной плоскости (так как Земля и Солнце — это два шара, вписанные в коническую поверхность).

Очевидно, что в каждый конкретный момент точечный наблюдатель видит луч от одного точечного источника, причём траектория, по которой перемещается этот источник на плоскости излучателей, является проекцией линии *CD* (это, естественно, окружность) на плоскость излучателей или на терминальную плоскость (формы этих проекций одинаковы, так как плоскости параллельны). (Одно из свойств центрального проектирования.)

Центральная проекция окружности на плоскость, если вся она попадает на плоскость, может быть:

а) окружностью;

б) эллипсом;

в) отрезком.

Пункт «а» отметается сразу, так как он возможен, только если плоскость окружности параллельна плоскости проектирования, а здесь это не так.

Пункт «в» бывает только для тела на экваторе и только два раза в году: 21 марта и 23 сентября, когда направление от Земли к Солнцу лежит в плоскости экватора (из астрономии). Во всех остальных случаях это эллипс. Из относительности перемещений ясно, что вращение Земли вокруг оси эквивалентно вращению вокруг него Солнца (конечно, только в геометрии). А значит, мы можем принять Землю неподвижной и следить за перемещением нашего «местного солнышка» (точечного источника) по плоскости излучателей.

Итак, переходим к ч а с т и 2 (рис. 90).

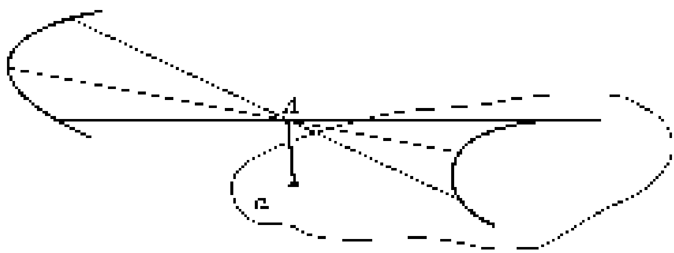


Рис. 90

Как уже было сказано, тень — это центральная проекция. С переходом на геоцентристскую систему мы центр этого проектирования переместили на сам предмет (так как теперь он неподвижен), а Солнце сделали двигающимся. Итак, какой может быть проекция эллипса на плоскость?

Из информации, содержащейся в учебнике и в справочнике, следует, что это может быть:

а) эллипс (частный случай — окружность);

б) парабола;

в) гипербола;

г) отрезок (возможен только на экваторе 21 марта и 23 сентября).

Итак, у нас имеется двойной конус с вершиной в *A*, который рассекается плоскостью Земли α (рис. 91).

О т в е т: а) если вся траектория «местного солнышка» лежит выше линии горизонта (рис. 91, *а*), то α пересекает все образующие конуса, а мы имеем **эллипс** (в зоне полярного дня).

б) Если Солнце на мгновение касается горизонта (рис. 91, *б*), то это значит, что α параллельна **одной** образующей конусов, а мы имеем **параболу** (на границе полярного дня).

П р и м е ч а н и е. В пунктах «а» и «б» высота палочки считалась пренебрежимо малой.

в) Если Солнце заходит за горизонт (имеется ночь — рис. 91, *в*), то α пересекает только часть образующих конуса, и мы имеем **гиперболу.** Отсюда вывод: на широте Санкт-Петербурга тень всегда гипербола.

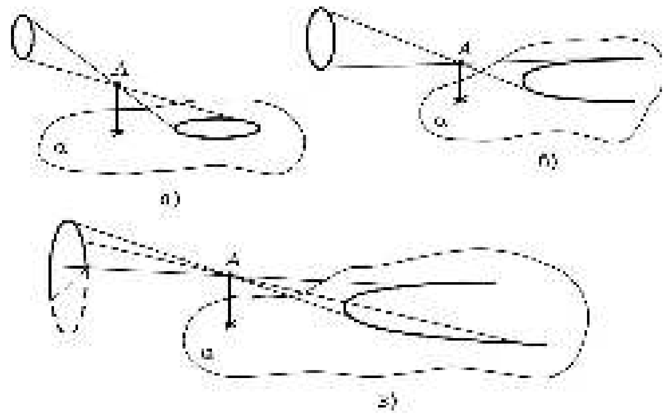


Рис. 91

г) Если Солнце не восходит над горизонтом (полярная ночь), то мы **ничего** не имеем.

д) Так как при вращении Земли вокруг оси полюса не перемещаются, то Солнце над освещённым полюсом всегда на одной высоте, и мы имеем **окружность,** так как там Солнце делает полный оборот вокруг палочки.

**12.49.** Ученик А. Ж.

Любые ли две треноги можно установить так, что перекладина, которая лежит на них, будет горизонтальна?

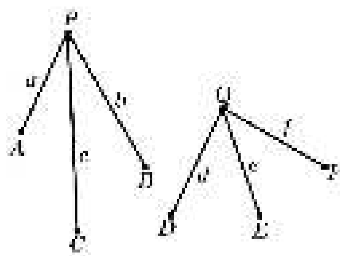


Рис. 92

Р е ш е н и е. Пусть даны две треноги $PABC$ и $QDEF$ (рис. 92) и длины их ног: $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$. Я утверждаю, что задачу можно решить для любых двух треног. При этом, естественно, считается, что Земля абсолютно ровная, а перекладина имеет такую длину, что она всегда «достанет» от точки $P$ точку $Q$.

Рассмотрим случай, когда точки $P$ и $Q$ лежат в плоскости Земли вместе с точками $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ (рис. 93). Тогда высоты $h_P$ и $h_Q$ равны 0. Теперь я буду поднимать точку $P$, двигая её по нормали к Земле, проведённой через точку $P$, когда она ещё лежала на Земле, и в то же время двигая точки $A$, $B$, $C$ по прямым, которые содержат отрезки $PA$, $PB$, $PC$, когда точка $P$ находилась на Земле.

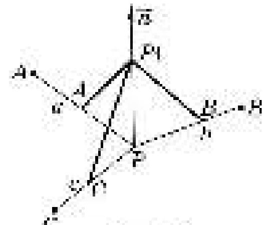


Рис. 93

Доказательство того, что возможно такое движение, приведено в конце решения (см. *). Но в какой-то момент одна из ног треноги (а может быть, и две, и три) оторвётся от поверхности Земли, так как $h_P$ станет больше, чем её длина. Это значит, что числовой промежуток, в пределах которого изменяется $h_P$, ограничен сверху каким-то числом $h_P$ max.

Аналогичные рассуждения можно провести и для треноги *QDEF*. Максимальное значение её высоты $h_Q$ max, минимальное 0. Так как высоты обеих треног изменялись в результате непрерывного движения, то множество возможных значений $h_P$ есть $[0,\ h_P \max]$, а $h_Q$ есть $[0,\ h_Q \max]$. Пересечение этих множеств не пусто, это есть множество $[0;\ \min(h_P \max,\ h_Q \max)]$. Значит, при движении треног, описанном выше, имеются такие промежуточные положения, в которых высоты треног одинаковы. (Реально получить такие положения можно, например, зафиксировав одну из треног и двигая другую.) Равенство высот треног, возможность которого я обосновал, означает параллельность перекладины, лежащей на них.

Действительно, пусть $PP'$ и $QQ'$ — высоты (рис. 94). Соединим точки $P$ и $Q$, $P'$ и $Q'$. Отрезки $PP'$ и $QQ'$ перпендикулярны плоскости Земли, следовательно, $PP' \parallel QQ'$, а поскольку с $PP'$ и $QQ'$ пересекаются $PQ$ и $P'Q'$, то все прямые $PP'$, $QQ'$, $PQ$, $P'Q'$ лежат в одной плоскости. $PP'Q'Q$ — параллелограмм, так как $|PP'| = |QQ'|$, $(PP') \parallel (QQ')$. Тогда $PQ \parallel P'Q'$, и, следовательно, $PQ$ параллельна Земле.

* Доказательство возможности движения (рис. 95).

Пусть $h_P < \min(a, b, c)$. Проведём из точки $P$ сферу радиуса $r$. Тогда $P'$, из которой исходит луч $A$, находится внутри сферы, так как $PP' < r$. Но тогда луч $a$ пересекает сферу. Пересечение есть точка $A$, $AP' = \sqrt{r^2 - h^2}$. Так как $r = \text{const}$, а $h_P$ непрерывно изменяется, то $AP'$ тоже изменяется непрерывно, а значит, $A$ совершает непрерывное движение по лучу $a$. Аналогично доказывается для точек $B$, $C$ и треноги *QDEF*.

А вот решение этой же задачи другим учеником.

**12.49.** Ученик И. Г.

Любые ли две треноги можно поставить так, что перекладина, установленная на них, будет горизонтальна?

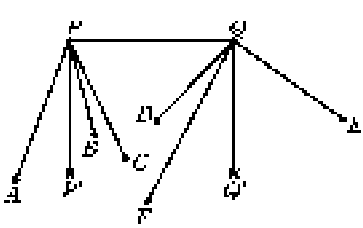


Рис. 94

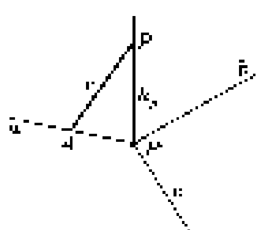


Рис. 95

О п р е д е л е н и е. Треногой назовём семейство тетраэдров, имеющих три заданных ребра, каждое из которых имеет массу и все они имеют общую вершину. Перекладина — отрезок, соединяющий общие вершины заданных рёбер двух треног. Перекладина является горизонтальной, если она перпендикулярна вектору ускорения свободного падения $\left(\vec{g}\right)$.

Рассмотрим случай, когда и плоскость, на которую установлены треноги, будет перпендикулярна $\vec{g}$. Так как прямая и плоскость, перпендикулярные одной прямой, параллельны и из параллельности прямой и плоскости следует постоянство расстояний от этой прямой до плоскости, то расстояния от общей вершины одной треноги и общей вершины другой треноги равны. Из этого по определению высоты тетраэдра следует, что любые две треноги могут иметь одинаковую высоту, что и требуется доказать.

Назовём данные рёбра первой треноги $a_1$, $a_2$, $a_3$, второй треноги $b_1$, $b_2$, $b_3$, высоты соответственно $h_1$ и $h_2$, данную плоскость $\gamma$, общие вершины рёбер $A$ и $B$ (рис. 96). Проведём через $h_1$ плоскость, перпендикулярную $\gamma$. Она пересечёт $\gamma$ по прямой, перпендикулярной $h_1$. Так как если один отрезок меньше другого, то существует прямоугольный треугольник (рис. 97), у которого катет равен первому отрезку, а гипотенуза — второму; если $h_1$ меньше всех трёх данных рёбер треноги ($a_1$, $a_2$, $a_3$), в плоскости $\alpha_1$ существует прямоугольный треугольник с гипотенузой $a_1$ и катетом $h_1$. Но высота $h_1$ в условии не ограничена, следовательно, мы всегда можем выбрать такую высоту, чтобы она была меньше всех данных рёбер обеих треног.

Аналогично через $h_1(\alpha_2, \alpha_3)$ и $h_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ проводим плоскости и получаем, что в них тоже существуют аналогичные прямоугольные треугольники. Но это и означает, что существуют две треноги с одинаковыми высотами.

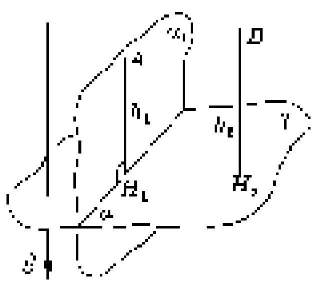


Рис. 96

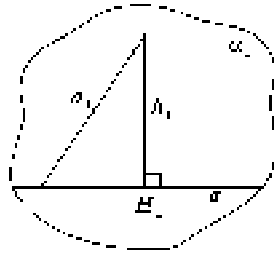


Рис. 97

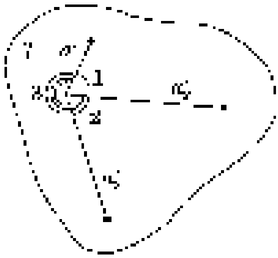


Рис. 98

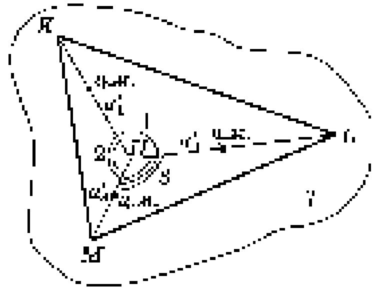


Рис. 99

Мы рассмотрели только геометрическую часть вопроса, но надо рассмотреть и физическую, а именно будут ли треноги находиться в равновесии, в каком именно равновесии, и если нет, то как устранить эту неприятность.

Рассмотрим проекцию треноги на плоскость $\gamma$ (рис. 98). Нужно доказать, что тренога будет находиться в равновесии, если углы 1, 2, 3 будут все меньше 180°. В этом случае будут существовать треугольники с общей вершиной $H$ и не перекрывающие друг друга, следовательно, $H$ будет лежать внутри $\triangle KLM$ (рис. 99). Так как проекция центра масс отрезка равна центру масс проекции отрезка, то рассмотрим центр масс проекций рёбер треноги.

По теореме о центре масс отрезка Ц. М. О. лежит на самом отрезке, значит, Ц. М. О. $a_1$, $a_2$, $a_3$ будут лежать внутри $\triangle KLM$, так как $KH$, $HL$, $MH$ лежат внутри $\triangle KLM$, а так как центр масс треугольника лежит внутри треугольника, то проекция центра масс треноги, являющаяся центром масс треугольника, образованного проекциями центров масс рёбер, лежит внутри $\triangle KLM$. Но по известной теореме о равновесии тела для равновесия тела достаточно, чтобы проекция центра масс фигуры попадала внутрь проекции самого тела или площади, ограниченной крайними точками проекции тела. В данном случае это и происходит. Следовательно, если углы 1, 2, 3 меньше 180°, то тренога будет находиться в равновесии. А этого можно добиться, поворачивая плоскости $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ вокруг высоты $h_1$. Аналогично со второй треногой. Следовательно, в вышеуказанном понимании слова можно поставить любые две треноги так, что перекладина будет горизонтальна.

## II. ИЗ ОПЫТА ПРОВЕДЕНИЯ ПЕРЕВОДНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ГЕОМЕТРИИ В 10 КЛАССЕ

Обязательные экзамены по геометрии в старших классах не проводились много лет, а на основе этого учебника весьма редки. Поэтому огромный интерес вызвало решение о проведении переводных экзаменов, да ещё на столь демократической основе, когда и учителям, и ученикам предоставляется возможность разумного выбора учебного предмета для экзамена. Подводить окончательные итоги рано, но уже можно сделать некоторые предварительные выводы.

Поставив основной целью выявить уровень знаний и умения применять эти знания при решении задач, мы по-разному пошли к её реализации. В школе № 366 Санкт-Петербурга был проведён устный экзамен по геометрии, а в физико-технической школе не было устного экзамена, и поэтому прошла трёхчасовая итоговая работа по геометрии.

При составлении и проведении письменной работы по геометрии основной упор был сделан на проверку усвоения именно идей рассматриваемого учебника, круга вопросов, возникающих при работе с ним, техническим, методическим идеям и алгоритмам, вырабатываемым при его изучении. Собственно говоря, у устного экзамена это тоже было основной целью. Но были учтены и другие моменты.

1. При проведении устного экзамена, конечно, недостаточно было руководствоваться предлагаемыми текстами билетов для обычных школ. Даже содержание программы другое, не говоря уже о глубине знаний и объёме информации в учебнике. С другой стороны, просто умножив число теорем в билете, мы лишь вызываем психологический шок у ученика и усиливаем у него впечатление фрагментарности изучаемого.

2. Как показывает практика, в начале 10 класса ученик не понимает логики изложения, взаимосвязи математических утверждений и нередко (особенно в 9 классе и по совету учителей) заводит некую тетрадку, где выписан ответ на каждый билет, но из которой ученику никак не углядеть «математичность» изучаемой математики. К концу 10 класса учащиеся как будто бы осваиваются, но ведь это и должен проверить экзамен.

3. Поэтому в каждом билете был один вопрос по теории. Но он требовал от ученика связного изложения нескольких математических утверждений, создания некоей «математической новеллы», «этюда на тему». Иногда эта «новелла» совпадала с пунктом учебника, иногда «этюд» нужно было продумывать самому.

4. Вопросы по теории получались не всегда равноценными, были и громоздкие. В этом случае мы оставляли за учителем право разрешать ученику начиная с некоторого момента ограничиться планом, ответить лишь на отдельные пункты этого плана. В билетах с громоздкой и сложной теорией трудность задач была меньшая (и наоборот).

5. Отметим ещё одну цель задачной части билетов. Иногда приходится слышать, что задачи в учебнике слишком общи, без чисел, и ученик, столкнувшись с задачами на вычисление (в обычном смысле этого слова), на первых порах теряется. Это заставило включить в билеты бóльшую, чем в учебнике, долю задач на вычисление. Задачи эти брались из задачников разных авторов и разных лет издания. Несколько задач представил из своего дидактического материала учитель школы № 524 Санкт-Петербурга Б. Г. Зив, и, конечно, основным источником оставался учебник.

Примерный текст ***письменной итоговой работы*** на три урока.

I в а р и а н т

Основание пирамиды $PABC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине $C$, $|PA| = |PB| = |PC| = |AC| = |CB| = 2$.

1. Доказать: $(PAB) \perp (ABC)$.
2. Найти: $|(AB), (PC)|$.
3. Доказать: $\angle((PA), (BC)) = \angle((PB), (AC))$. Вычислить его.
4. Доказать: $\angle((PAC), (ABC)) = \angle((PBC), (ABC))$. Вычислить его.
5. Через точку $C$ проводится сечение, параллельное $AB$. В каких границах лежат его площадь и периметр?

II в а р и а н т

$PABCD$ — четырёхугольная пирамида, $|PA| = |PB| = 2$, $|PC| = |PB| = 2\sqrt{2}$. Основание пирамиды — квадрат со стороной 2.

1. Доказать: $(PAB) \perp (ABC)$.
2. Найти: $|(AB), (PCD)|$.
3. Доказать: $\angle((PC), (AD)) = \angle((PD), (BC))$. Вычислить эти углы.
4. Доказать: $\angle((PCD), (PAD)) = \angle((PCD), (PBC))$. Вычислить эти углы.
5. Через $CD$ проводится сечение, параллельное $AB$. В каких границах лежат площадь и периметр этого сечения?

Ученики успешно справились с этой работой. Их работы существенно различались ходом мысли, способами решения, логикой изложения. Было приятно видеть возросшую самостоятельность учащихся. Но не у всех хватило времени на выполнение пяти заданий полностью.

## БИЛЕТЫ ДЛЯ УСТНЫХ ПЕРЕВОДНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ГЕОМЕТРИИ В 10 КЛАССЕ

Билет № 1

1. Как можно задать прямую в пространстве? Теорема о прямой, определяемой двумя точками.
2. Задача на тему «Перпендикулярность и параллельность в пространстве».

Билет № 2

1. Как можно задать плоскость в пространстве? Теорема о плоскости, определяемой тремя точками. Теорема о плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку, о плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые (по выбору учителя).
2. Задача на тему «Расстояния и углы».

Билет № 3

1. Теорема о четырёх точках, не лежащих в одной плоскости. Теорема о множестве плоскостей, проходящих через данную прямую.
2. Задача на тему «Перпендикулярность и параллельность в пространстве».

Билет № 4

1. Классификация взаимного положения двух прямых в пространстве. Признаки скрещивающихся прямых.
2. Задача на тему «Перпендикулярность и параллельность в пространстве».

Билет № 5

1. Параллельные прямые. Теорема о существовании и единственности прямой, параллельной данной и проходящей через точку вне её. Теорема о транзитивности параллельности прямых (с леммой).
2. Задача на тему «Перпендикулярность и параллельность в пространстве».

Билет № 6

1. Перпендикуляр и наклонные к плоскости. Их сравнение. Теорема о единственности перпендикуляра.
2. Задача на тему «Расстояния и углы».

Билет № 7

1. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Задача на тему «Углы в пространстве».

Б и л е т № 8

1. Теоремы о связи перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей (4). Доказательство двух из них (по выбору учителя).
2. Задача на тему «Способы задания прямой и плоскости».

Б и л е т № 9

1. Леммы о пересечении прямой или плоскости с параллельными плоскостями.
2. Задача на пространственную теорему Пифагора.

Б и л е т №10

1. Основная теорема о параллельных плоскостях и следствия из неё.
2. Задача на тему «Сфера и шар».

Б и л е т № 11

1. Классификация взаимного положения прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости.
2. Задача на тему «Взаимное положение плоскостей».

Б и л е т № 12

1. Лемма о плоскости параллелей. Второй признак параллельности плоскостей.
2. Задача на тему «Расстояния и углы».

Б и л е т № 13

1. Определение и свойства перпендикулярных плоскостей.
2. Задача на тему «Сфера и шар».

Б и л е т № 14

1. Признаки перпендикулярных плоскостей.
2. Задача на тему «Взаимное положение прямых в пространстве».

Б и л е т № 15

1. Расстояние от точки до фигуры. Точка фигуры, ближайшая к данной точке. Примеры. Лемма о ближайшей точке.
2. Задача на тему «Параллельность в пространстве».

Б и л е т № 16

1. Теорема о ближайшей точке и следствия из неё.
2. Задача на тему «Множества точек в пространстве, обладающих определённым свойством».

Б и л е т № 17

1. Расстояние между фигурами. Расстояние от фигуры до плоскости, расстояние между скрещивающимися прямыми.
2. Задача на тему «Параллельность прямых и плоскостей».

Б и л е т № 18

1. Угол между лучами. Теорема об углах, стороны которых соответственно сонаправлены. Угол между прямыми.
2. Задача на тему «Пространственная теорема Пифагора».

Б и л е т № 19

1. Двугранный угол и его величина. Линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями.
2. Задача на тему «Параллельность в пространстве».

Б и л е т № 20

1. Сфера. Шар. Теорема о пересечении шара и сферы с плоскостью. Следствия из неё.
2. Задача на тему «Перпендикулярность в пространстве».

Б и л е т № 21

1. Теорема о касании сферы с плоскостью. Шар и расстояние от точки до фигуры.
2. Задача на тему «Углы в пространстве».

## Задачи к билетам

**№ 1.** В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник $ABC$: $|AC| = |BC| = a$, $\angle ACB = 120°$, грани $DAC$ и $DAB$ перпендикулярны плоскости основания, а грань $DBC$ составляет с ней угол 45°. Найти наибольшую из площадей боковых граней пирамиды.

**№ 2.** Боковое ребро призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно основанию, которое является параллелограммом со сторонами $2\sqrt{2}$ и 2, $\angle ADC = 135°$. Найти расстояние между параллельными гранями призмы, если диагональ $A_1C$ призмы образует с плоскостью основания угол 60°.

**№ 3.** Доказать, что плоскость, параллельная двум скрещивающимся прямым, перпендикулярна прямой, которая перпендикулярна этим двум прямым.

**№ 4.** $AB$ и $CD$ — параллельные прямые, лежащие в двух пересекающихся плоскостях и не совпадающие с их линией пересечения, $AE$ — перпендикуляр к линии пересечения плоскостей, $AF$ — перпендикуляр к $(CD)$. Доказать, что $(AB) \perp (AEF)$.

**№ 5.** Каждая из плоскостей $\alpha$ и $\beta$ перпендикулярна двум данным пересекающимся плоскостям. Указать взаимное расположение плоскостей $\alpha$ и $\beta$. А если данные плоскости параллельны?

**№ 6.** На чертеже изображён равнобедренный треугольник $ABC$, где $|AC| = |BC| = a$, $\angle BAC = 30°$, и перпендикуляр к его плоскости $MC$ длиной $a$. Где на этом чертеже изобразится точка $O$, равноудалённая от $A$, $B$, $C$, $M$? Как найти $|OA|$, $\angle((MBA), (CBA))$, $\angle((AC), (MBC))$?

**№ 7.** В правильной четырёхугольной пирамиде боковые рёбра наклонены к основанию под углом 45°. Найти угол между соседними боковыми гранями пирамиды.

**№ 8.** Какую фигуру образует множество всех прямых, пересекающих прямую $a$ и проходящих через точку $M \notin a$?

**№ 9.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $K$ и $L$ движутся по отрезкам $A_1B$ и $AC$ так, что всегда $|A_1K| = |AL|$. Выразить $|KL|$ как $f(x)$, где $x = |A_1K|$.

**№ 10.** Через точку $A$ шара проведена к нему опорная плоскость. На луче $OA$ (точка $O$ — центр шара) взята точка $K$, не принадлежащая шару. Из неё проведены лучи, имеющие с шаром единственную общую точку. Доказать, что все они образуют с опорной плоскостью равные углы.

**№ 11.** Прямая $a$ и параллельная ей плоскость $\alpha$ не проходят через точку $M$. Доказать, что существует плоскость, проходящая через $M$ параллельно $a$ и $\alpha$, и притом только одна.

**№ 12.** Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $4\sqrt{2}$, а двугранный угол при стороне основания — 60°. Найти расстояние от центра основания до боковой грани и угол между высотой пирамиды и плоскостью боковой грани.

**№ 13.** Тело ограничено двумя шаровыми поверхностями с общим центром (полый шар). Доказать, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней шаровой поверхности.

**№ 14.** Даны четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$, через которые нельзя провести плоскость. Доказать, что прямые, соединяющие середины отрезков $AB$ и $CD$, $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$, пересекаются в одной точке.

**№ 15.** Два параллелограмма в пространстве расположены так, что сторона одного параллельна стороне другого, причём никакие две стороны этих параллелограммов не лежат на одной прямой. Доказать: «Если плоскости параллелограммов пересекаются, то линия пересечения параллельна соответствующим сторонам параллелограммов».

**№ 16.** Дан трёхгранный угол $PABC$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — биссектральные плоскости углов при его рёбрах $PA$, $PB$, $PC$. Что представляет собой $\alpha \cap \beta \cap \gamma$?

**№ 17.** В тетраэдре $DABC$ точка $E$ принадлежит ребру $AC$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку $E$ параллельно рёбрам $AD$ и $BC$, и определить вид сечения.

**№ 18.** Плоскости $\alpha$ и $\beta$ взаимно перпендикулярны: $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AA_1 \perp \beta$, $BB_1 \perp \alpha$. Можете ли вы установить связь между величинами $|AB|$, $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|A_1B_1|$?

**№ 19.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провести два параллельных сечения через $A_1C_1$ и $D_1C$.

**№ 20.** Доказать, что плоскость, проходящая через высоту пирамиды и высоту её боковой грани, перпендикулярна плоскости этой боковой грани.

**№ 21.** Доказать: «Если плоскость, проходящая через гипотенузу прямоугольного треугольника, образует с катетами углы 30° и 45°, то с плоскостью треугольника она образует угол 60°».

Устные экзамены также прошли успешно.

# РЕШЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

## Задачи к § 1

**1.19.** Поскольку задача техническая, приведём только ответы и очень краткие подсказки. а) $LM = \frac{\sqrt{2}}{2}d$. б) Это высота тетраэдра, опущенная из вершины $P$, $\frac{\sqrt{6}}{3}d$. в) Один конец этого отрезка $M$, а другой — центр грани $PAC$, $\frac{1}{2}d$. г) Это медиана равнобедренного треугольника $BNO$, $\frac{\sqrt{11}}{4}d$. д) Средняя линия треугольника $PLB$ и медиана равностороннего треугольника $MNO$, $\frac{\sqrt{3}}{4}d$. е) Эта задача вытекает из пункта «в» заменой обозначений, $\frac{1}{2}d$. ж) Концы этого отрезка — центр грани $ABC$ и середина $AO$, $\frac{\sqrt{15}}{12}d$. з) Медиана в треугольнике $CMN$, $\frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}d$. и) Это тот же отрезок, что и в пункте «а», $\frac{\sqrt{2}}{2}d$.

**1.20.** $\left[\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Максимум и минимум достигаются, когда $K$ лежит в плоскости $ABC$. Чтобы доказать это, можно использовать неравенство треугольника для $\Delta KCD$, где $D$ — середина $AB$. $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $KD = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

**1.26.** Без ограничения общности можно считать, что наибольшее звено — $A_nA_1$ (если это не так, изменим нумерацию вершин). Будем доказывать, что $A_nA_1 \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n$. Доказательство проведём индукцией по $n$.

*База*. При $n = 2$ утверждение состоит в том, что $A_2A_1 \leqslant A_1A_2$, и оно, разумеется, верно.

*Переход*. По индукционному предположению

$$A_1A_2 + \ldots + A_{n-2}A_{n-1} \leqslant A_{n-1}A_1.$$

Поэтому $A_1A_2 + ... + A_{n-2}A_{n-1} + A_{n-1}A_n \leqslant A_{n-1}A_1 + A_{n-1}A_n$. Но по неравенству треугольника $A_{n-1}A_1 + A_{n-1}A_n \leqslant A_nA_1$, и поэтому утверждение верно.

**1.29.** О т в е т: нет. Допустим, что такие точки существуют. Построим отрезки $AB$, $AC$, $AD$, $BD$, $CD$. Пусть $E$ — середина $AD$. Построим ещё отрезки $BE$ и $CE$. Зная длины сторон в (равных) треугольниках $ABD$ и $ACD$, найдём длины их медиан: $BE = CE = \sqrt{39,75} < 6,5$. Но по неравенству треугольника $13 = BC \leqslant BE + CE < 13$. Противоречие.

**1.30.** Измерим расстояние до самолёта трижды через равные промежутки времени. Поскольку самолёт летит с постоянной скоростью, 4 точки — точка нашего местоположения и точки, в которых находился самолёт, когда мы измеряли расстояния до него, расположены в вершинах треугольника и в середине одной из его сторон. Обозначим измеренные расстояния через $a$, $b$ и $c$, скорость самолёта — $v$, промежутки времени — $t$. Зная боковые стороны треугольника $a$ и $c$ и медиану $b$, можно найти основание: $2vt = \sqrt{2a^2 + 2c^2 - 4b^2}$, откуда $v = \dfrac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - 4b^2}}{2t}$.

Формально говоря, это решение задачи. Однако на практике расстояние нельзя измерить точно. Часто абсолютная погрешность подобных измерений достаточно велика, небольшой является только относительная погрешность. Наш ответ прямо зависит от величины $a^2 + c^2 - 2b^2 = (a + b)(a - b) + (c + b)(c - b)$. Если промежутки времени между измерениями малы, то может оказаться, что разности $a - b$ и $c - b$ определяются не столько реальным изменением расстояния, сколько погрешностью измерения, т. е. ответ может не иметь ничего общего с действительностью. Поэтому время $t$ следует выбирать достаточно большим.

Разумеется, промежутки времени между измерениями совсем необязательно брать равными, мы сделали это только для упрощения формулы.

## Задачи к § 4

**4.8.** Нарисуем проекцию квадрата — произвольный параллелограмм $ABCD$ — и продолжим ту его сторону (сторону $AB$), которая должна лежать на стороне треугольника, в обе стороны, чтобы получившийся отрезок делился вершинами параллелограмма в отношении $1 : \sqrt{3} : 1$. Получившиеся точки $E$ и $F$ — проекции вершин треугольника, поскольку вершины вписанного квадрата делят сторону правильного треугольника именно в таком отношении, а отношение отрезков на прямой сохраняется при проектировании. Проведём теперь лучи $ED$ и $FC$ до точки их пересечения $G$. Эта точка — проекция третьей вершины треугольника.

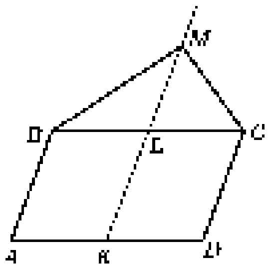



Рис. 100

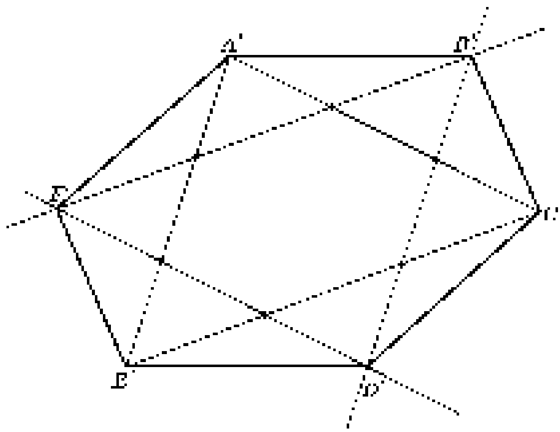


Рис. 101

**4.9.** Воспользуемся тем, что медиана исходного треугольника является продолжением средней линии квадрата и имеет длину $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ от длины этой средней линии.

Построим сначала произвольный параллелограмм *ABCD* (проекцию квадрата). Проведём в нём среднюю линию *KL*, как на рисунке 100, и продолжим её за точку *L* на расстояние $\dfrac{\sqrt{3}}{2}KL$. Получившаяся точка *M* даёт третью (в дополнение к *A* и *D*) вершину проекции треугольника.

**4.10.** а) Назовём правильный шестиугольник *ABCDEF* и будем строить его проекцию *A'B'C'D'E'F'*. Для этого построим сначала произвольный треугольник *A'C'E'* и разделим каждую его сторону в отношении 1 : 1 : 1. Теперь проведём 3 прямые, как показано на рисунке 101, и точки их пересечения назовём *B'*, *D'* и *F'*.

б) Нарисуем сначала 3 соседние вершины проекции *A'*, *B'*, *C'* (рис. 102). Чтобы построить *D'* и *E'*, воспользуемся тем фактом, что диагонали в правильном пятиугольнике параллельны сторонам, а длина диагонали правильного пятиугольника в $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ раз больше длины стороны. Проведём прямые, параллельные сторонам, и отложим на них нужные отрезки.

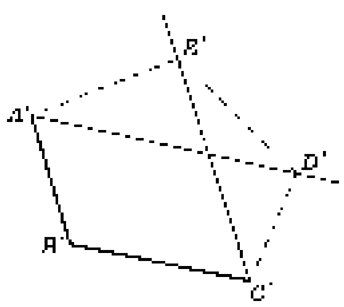



Рис. 102

**4.11.** Сделаем сначала несколько замечаний. Параллельные хорды окружности при проектировании переходят в параллельные хорды эллипса. (При проектировании параллельные прямые переходят в параллельные.) Середины параллельных хорд эллипса лежат на одной прямой, и эта прямая проходит через центр окружности. (Свойство точек лежать на одной прямой не теряется при проектировании.)

Эта прямая — проекция прямой, перпендикулярной соответствующим хордам окружности. Таким образом, если задан эллипс, являющийся проекцией окружности, то для любой проекции прямой мы можем построить проекцию перпендикулярной ей прямой: построим 2 параллельные данной прямой хорды и проведём прямую через их середины.

Чтобы избежать громоздких фраз, будем говорить, что 2 прямые на нашем рисунке перпендикулярны (в прообразе), если они являются проекциями перпендикулярных прямых.

Теперь перейдём собственно к решению задачи.

а) Проведём 2 параллельные хорды, проведём хорду через их середины. Её середина — искомый центр $O$.

б) Проведём проекцию радиуса в эту точку (центр у нас уже есть), а потом проекцию перпендикулярной ему прямой, проходящей через данную точку.

в) Медианы вписанного в окружность равностороннего треугольника пересекаются в центре этой окружности и делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1. Возьмём произвольную точку $A$ на эллипсе и проведём через неё диаметр $AB$ (рис. 103). Проведём прямую, перпендикулярную (в прообразе) к прямой $AB$, через точку $C \in AB$, $AC : BC = 3 : 1$. Точки $D$ и $E$ её пересечения с эллипсом вместе с точкой $A$ являются вершинами проекции правильного треугольника.

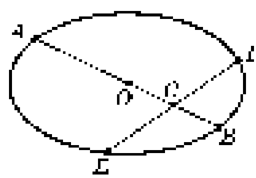


Рис. 103

г) Полностью аналогично пункту «в».

д) Проведём в эллипсе 2 перпендикулярных (в прообразе) диаметра, их концы дадут вершины проекции квадрата.

е) Проведём касательные через вершины вписанного квадрата.

ж) Следующее решение не зависит от того, где находится изображение. Проведём через него диаметр и построим прообраз, т. е. такую же картинку для окружности. (Существенно только, чтобы отношения длин на одной прямой не изменились.) Проведём на этом прообразе касательную и перпендикулярную диаметру хорду через точку касания, а затем перенесём эту хорду в образ. (Проводить перпендикуляры мы умеем, откладывать на диаметре нужное отношение тоже.) Таким образом мы получим точку касания.

**4.12.** Эти факты верны для правильных фигур (равностороннего треугольника, равнобокой трапеции). При проектировании правильные фигуры превращаются в произвольные, а указанные факты сохраняются.

## Задачи к § 5

Во многих задачах этого параграфа сразу легко получить «почти решение», т. е. решение, которое оказывается правильным, если только не произошло какого-нибудь случайного совпадения. Довести дело до конца, оказывается, обычно чуть сложнее. (Для этого используется, с небольшими вариациями, принцип Дирихле. Мы замечаем, что «плохих» ситуаций — конечное число, и предлагаем нарисовать на 1 больше этого числа «почти решений». Одно из них наверняка окажется решением.) Для того чтобы объяснения были понятными, полезно чётко разделить две части решения.

**5.5.** Нужно провести плоскость через центры трёх кругов. Если такая плоскость единственная (т. е. центры не лежат на одной прямой) и один из кругов лежит в получившейся плоскости, то у задачи нет решения.

**5.7.** а) Возьмём по одной точке $A$, $B$, $C$ на каждой из прямых $a$, $b$ и $c$ соответственно. Кажется, что плоскость $ABC$ искомая.

Но может произойти неприятность: одна из прямых (скажем, $a$) может целиком лежать в этой плоскости. В таком случае возьмём новую точку $B_1 \in b$. Может ли оказаться, что $a \in AB_1C$? Нет, тогда у плоскостей $ABC$ и $AB_1C$ есть общая прямая $a$ и общая точка $C$, т. е. они совпадают. Но тогда $B \in AB_1C$, $b \in AB_1C$, и в итоге прямые $a$ и $b$ лежат в одной плоскости. Аналогично убеждаемся, что $B$ не может лежать в $AB_1C$. Единственная возможная неприятность: $c \subset AB_1C$. Тогда придётся взять третью точку $B_2 \in b$, для неё уже всё в порядке.

б) Проведём плоскость, проходящую через одну из прямых. Если она пересекает две другие прямые, то в качестве ответа можно взять любую параллельную ей плоскость.

К сожалению, это ещё не решение: может так случиться, что наша плоскость не пересекает одну из оставшихся прямых (или даже обе). Но это значит, что она параллельна одной из оставшихся прямых. Проведём через первую прямую три различные плоскости. Две из них не могут быть одновременно параллельны одной из двух оставшихся прямых, поэтому хотя бы одна из трёх плоскостей подходящая.

**5.8.** Проведём плоскость через одну из этих прямых, которая пересекает все остальные. (Это можно сделать аналогично пункту «б» предыдущей задачи.) В сечении этой плоскостью у нас получилась прямая и $n - 1$ точек. Мы можем провести в этой плоскости прямую, которая пересекает уже имеющуюся. а) Проходит ровно через одну точку. б) Не проходит ни через одну из точек.

**5.9.** Возьмём $n$ параллельных плоскостей и будем проводить в них прямые, понемногу $\left(\text{скажем, на угол } \dfrac{90^\circ}{n}\right)$ поворачивая их (в каждой следующей плоскости относительно предыдущей). Это и будут искомые прямые.

То, что рассказано, разумеется, не решение. Это, скорее, идея. Для строгого доказательства можно взять $n$ параллельных плоскостей $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (нужно ещё доказать, что такие существуют), пересекающую их прямую, $n$ проходящих через эту прямую плоскостей $\beta_1, ..., \beta_n$ (снова та же проблема) и в качестве прямых взять $p_1 = \alpha_1 \cap \beta_1, \ldots, p_n = \alpha_n \cap \beta_n$ (тут ещё потребуется доказательство того, что они скрещиваются).

**5.10.** Возьмём точку $A$ на первой прямой $a$ и построим плоскость, проходящую через эту точку, и вторую прямую $b$. Эта плоскость пересечёт третью прямую $c$ в точке $C$ (иначе $b \parallel c$). Прямая $AC$ искомая, если только она не параллельна $b$.

Если же $AC \parallel b$, то возьмём новую точку $A_1 \in a$ и соответствующую $C_1 \in c$. $C \neq C_1$, так как иначе две наши плоскости имеют общую прямую $b$ и общую точку $C$ и, следовательно, совпадают. Может ли случиться так, что $A_1C_1 \parallel b$? Нет, так как тогда $AC \parallel A_1C_1$, все точки $A$, $C$, $A_1$, $C_1$ лежат в одной плоскости, значит, $a$ и $c$ лежат в одной плоскости, что противоречит условию.

**5.11.** Существует плоскость, которая не параллельна ни одной из прямых, проходящих через две из данных точек. (Это доказывается аналогично предыдущим задачам.) Проведём параллельные ей плоскости (5 плоскостей) через все данные точки. Одна из них (средняя) и есть искомая.

**5.12.** Да, достаточно взять $n + 1$ параллельных плоскостей, одна из них будет искомой.

## Задачи к § 8

**8.9.** Таких сечений много (плоскость можно поворачивать вокруг вертикальной прямой).

а) Нарисуем сначала какой-нибудь отрезок на основании тетраэдра через данную точку. Теперь нужно найти точку на боковом ребре, через которую проходит сечение. Для этого найдём сначала соответствующую точку на проекции бокового ребра на основание (проекция бокового ребра — часть медианы, так что искомая точка — точка пересечения медианы с уже нарисованным отрезком), а затем восстановим перпендикуляр к основанию до точки пересечения с боковым ребром (его несложно нарисовать, так как он параллелен высоте тетраэдра).

б) Нужно выполнить те же действия в обратном порядке: нарисовать перпендикуляр из данной точки на основание (т. е. нарисовать отрезок, параллельный высоте тетраэдра, до точки пересечения с медианой основания); построить любой отрезок на основании, проходящий через получившуюся точку; если нужно, построить точки пересечения с другими боковыми рёбрами.

Что касается пункта «2», то его разумно задавать с фиксированными числовыми данными; наиболее простой результат получается, если взять точку в середине ребра основания. В этом случае сечение может быть только треугольным и максимум площади достигается, когда оно проходит через вершину. (Во всех других ситуациях, кроме случаев задания точек в вершинах, возможно также четырёхугольное сечение.)

**8.12.** Дело в том, что все 4 точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат в плоскости, проходящей через $C$ и перпендикулярной $A$. Для $C$ это очевидно, $B$ и $D$ лежат на перпендикулярах к $a$, проходящих через $C$. Наконец, точка $A$ лежит на прямой $AB$, которая перпендикулярна $\alpha$. Но $a \subset \alpha$, поэтому вся прямая $AB$ лежит в нашей плоскости.

**8.19.** Нет. Если это возможно и через некоторую точку проходят четыре такие плоскости $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, рассмотрим прямые $a = \alpha \cap \beta$, $b = \alpha \cap \gamma$ и $c = \alpha \cap \delta$. Они лежат в одной плоскости $\alpha$ и попарно перпендикулярны ($b$ — пересечение двух плоскостей, перпендикулярных $\gamma$, значит, $b \perp \gamma$, но $c \subset \gamma$, так что $b \perp c$). Но это невозможно (три попарно перпендикулярные прямые на плоскости не существуют).

## Задачи к § 10

**10.10.** Решение изображено на рисунке 104, приведём только несколько замечаний.

Рисуя сечения, нужно следить за тем, чтобы линии пересечения с одной и той же гранью были параллельны.

В случае «а» одно из сечений совпало с боковой гранью.

На рисунке в качестве правильной треугольной пирамиды взят правильный тетраэдр, поэтому в случаях «в» и «д» решения совпали. В случаях «б» и «г» также изображено одно и то же, только тетраэдр повёрнут разными способами.

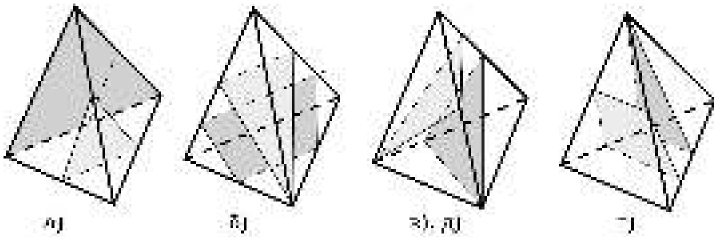


Рис. 104

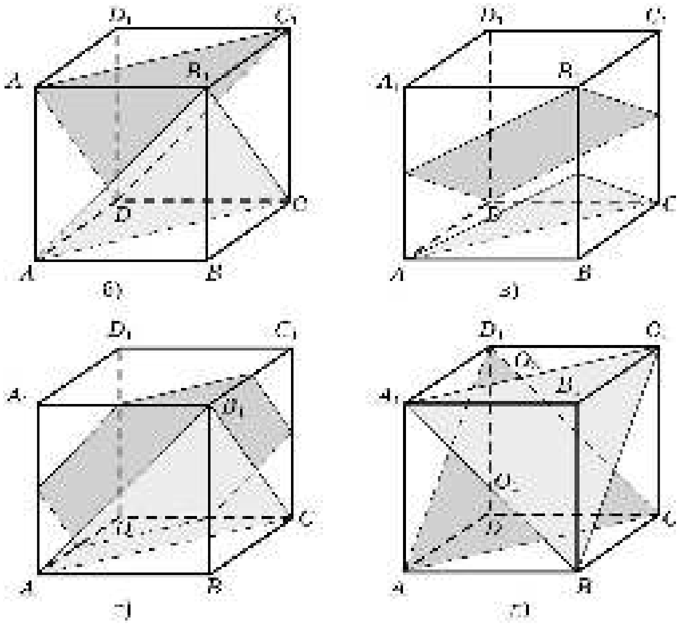


Рис.105

**10.11.** В случае «а» сечения просто совпадают с гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба, остальные случаи (случаи «б»—«д») показаны на рисунке 105.

**10.14.** Точка $L$ — середина $B_1C_1$.

Параллельность отрезка $KL$ грани призмы проще всего объяснить из соображений симметрии: если они пересекаются, то с какой стороны отрезка это происходит: за $K$ или за $L$? На рисунке видно, что обе стороны абсолютно равноправны.

Для строгого доказательства можно провести плоскость через $K$, $L$ и середины $BC$ и $A_1C_1$. Она содержит наш отрезок и перпендикулярна грани.

Эта плоскость полезна и для вычисления длины отрезка. Сечением призмы этой плоскостью является прямоугольник, стороны которого — высота призмы и половина ребра основания, а диагональ — искомый отрезок.

**10.15.** От $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (когда $K$ и $L$ — центры граней куба) до 1 (когда $KL$ — ребро куба). Если проведём через $KL$ сечение, параллельное грани куба, то увидим, что $KL$ — гипотенуза прямоугольного треугольника, сумма катетов которого равна 1.

**10.19.** Будем считать, что $a$, $b$ и $p$ проходят через одну точку. (Если это не так, перенесём $a$ и $b$, чтобы это требование выполнялось; факты параллельности и перпендикулярности при этом сохранятся.) Поскольку $p$ лежит в $\alpha$ и $a \perp \alpha$, то $p \perp a$. Аналогично $p \perp b$. Таким образом, $p$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым, параллельным $\gamma$, значит, $p \perp \gamma$.

**10.29.** Эта задача легко решается с учётом сведений, изложенных в § 11. Поэтому здесь приведём только о т в е т ы: а) Да. б) Нет. в) Да. г) Нет. д) Да.

**10.30.** Видимо, имеется в виду, что треугольники находятся в перпендикулярных $ABCD$ плоскостях. Тогда прямая $KL$ и плоскость $ABC$ параллельны. Достаточно показать, что если $E$ и $F$ — основания высот, опущенных из $K$ и $L$ в треугольниках $ABK$ и $CDL$ соответственно, то четырёхугольник $KLFE$ — прямоугольник. Но это так, потому что $KE = LF$ (высоты в равных треугольниках), $KE \perp EF$, $LF \perp EF$. Это рассуждение никак не использует форму $ABCD$.

**10.31.** Нет. Такой плоскости нет, например, для трёх попарно перпендикулярных прямых. Действительно, если такая плоскость найдётся, то она будет параллельна двум первым прямым, а значит, перпендикулярна третьей. Но тогда она пересечётся с третьей прямой. Противоречие.

**10.32.** 1) Посмотрим на прямые $AA_1$ и $AA_2$. Они лежат в плоскости $AA_1A_2$, пересекаются между собой и параллельны соответственно прямым $BB_1$ и $BB_2$. Но две последние лежат в плоскости $BB_1B_2$. Значит, эти плоскости параллельны.

3) Да, например, если прямая $AB$ параллельна $p$.

## Задачи к § 11

**11.9.** От $\frac{\sqrt{3}}{3}$ до $\sqrt{3}$. Наибольшее значение достигается, когда проектируемая диагональ параллельна плоскости проекции, в этом случае длина проекции равна просто длине диагонали. С другой стороны, длина проекции не может быть меньше длины проекции на другую диагональ. Эта длина составляет (замечательный факт!) треть от всей длины диагонали.

**11.11.** Если прямая образует равные углы с двумя прямыми в данной плоскости (и если её проекция на эту плоскость — прямая), то её проекция — биссектриса угла между этими двумя прямыми на плоскости. Так как прямая не может быть одновременно биссектрисой двух разных углов с общей стороной, условие означает, что она проектируется в точку, т. е. перпендикулярна плоскости.

**11.16.** а) Нет. б) Нет. в) Да, если $A'$ и $B'$ — проекции $A$ и $B$ соответственно, то весь отрезок $A'B'$ содержится в проекции, он является проекцией $AB$. г) Да. д) Нет, квадрат может стать любым параллелограммом. е) Да, так как расстояния не увеличиваются.

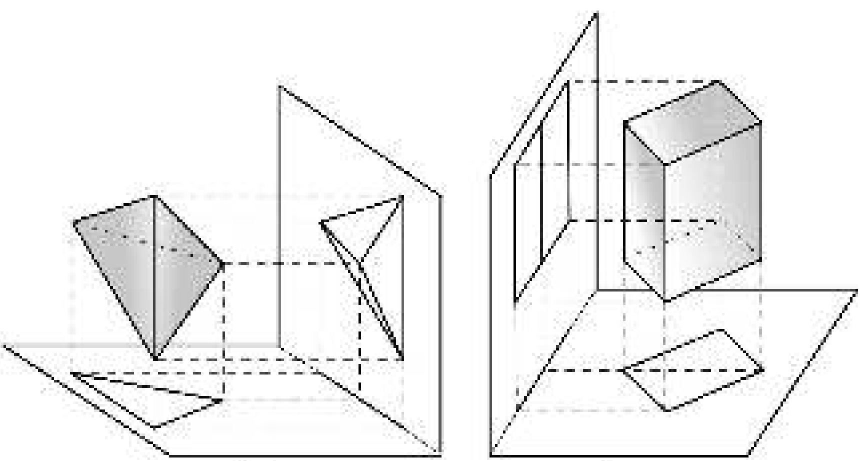
**11.17.** Результат может быть любым по форме параллелограммом за одним исключением: проекция квадрата, не параллельного плоскости проекции, не может быть квадратом.

**11.18.** Можно только сказать, что это параллелограмм (впрочем, для этого достаточно одного квадрата). Этот параллелограмм может быть как прямоугольником (если по 2 стороны у обоих квадратов параллельны прямой пересечения плоскостей), так и ромбом (если все стороны квадратов составляют углы по 45° с прямой пересечения).

**11.19.** Для треугольников и квадратов ответ «да», это показано на рисунке 106. Если проекцию фигуры на плоскость спроектировать на прямую, лежащую в этой плоскости, то получится проекция фигуры на прямую. Если проекции на 2 плоскости — неравные круги, то после проектирования их на общую прямую этих плоскостей должны получиться неравные отрезки, что невозможно. Таким образом, для кругов ответ «нет».

## Задачи к § 12

**12.19.** Если провести плоскость, проходящую через данную точку и перпендикулярную краям полосы, то в сечении получатся точка (данная точка) и отрезок (сечение полосы). Длина отрезка равна $d$, расстояния от точки до его концов — $d_1$ и $d_2$. Искомое расстояние есть расстояние от точки до отрезка. Это либо одно из расстояний $d_1$ или $d_2$, если треугольник получился тупоугольным или прямоугольным, либо высота этого треугольника (если оба угла при основании острые).



а) б)

Рис.106

**12.25.** О т в е т: $\frac{\sqrt{3}d}{2}$. При таком условии $X$ лежит в плоскости треугольника $ABC$, причём $XBAC$ — ромб.

**12.26.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Здесь $XABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с боковым ребром, равным ребру основания.

б) 1. В этом случае $XAB = XAD = 120°$, т. е. проекция точки $X$ на плоскость $ABCD$ попадает вовне квадрата (на продолжение диагонали $CA$).

**12.32.** Длина высоты призмы равна $\frac{2\sqrt{6}}{3}AA_1$. При $AA_1 = 2ABCA_1$ — правильный тетраэдр и конец высоты из точки $A_1$ попадает в центр его основания (треугольника $ABC$). При этом конец высоты лежит на медиане $ABC$, проведённой из точки $A$, и делит эту медиану в отношении 2 : 1.

Если менять длину $AA_1$, то основание высоты будет двигаться по медиане. При $AA_1 = 1$ медиана делится в отношении 1 : 2, а при $AA_1 = 3$ основание высоты совпадает с концом медианы.

**12.33.** О т в е т: $d\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}}$.

**12.34.** Все эти сечения — правильные треугольники со стороной, линейно зависящей от $x$. Более точно, сторона равна $2 - x$. Соответственно площадь сечения есть $\frac{\sqrt{3}}{2}(2-x)^2$.

**12.36.** Прежде всего $x$ меняется от 0 (сечение совпадает с $PCD$) до $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (сечение — отрезок $AB$). Промежуточные сечения — трапеции. Большее основание не зависит от $x$, оно равно $CD = 2\sqrt{2}$. Меньшее основание меняется в зависимости от $x$ линейно, оно равно $\sqrt{3}\cdot x$. Высота также меняется линейно, она равна $\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-x\right)$. Таким образом, площадь сечения

$$S(x) = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot x)\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-x\right).$$

Это квадратичная функция, у которой можно обычным способом найти максимум (минимум достигается на одном из концов отрезка и равен 0).

**12.38.** Допустим, что $|XF_2| < |XF_1|$. Это значит, что если $A$ и $B$ — ближайшие к $X$ точки в $F_1$ и $F_2$ соответственно, то $XB < XA$. Но $B \in F_2 \subset F_1$, т. е. точка $B$ лежит в $F_1$ и расположена ближе к $X$, чем $A$. А это противоречит тому, что $A$ — ближайшая к $X$ точка $F_1$.

**12.45.** Есть несколько вариантов ответа в зависимости от расположения прямых.

1) Прямые параллельны, тогда расстояние не меняется.

2) Прямые пересекаются, тогда расстояние меняется по формуле $Xb = r\sin\alpha$, где $r$ — расстояние от $X$ до точки пересечения прямых, а $\alpha$ — угол между прямыми. График этой функции — угол.

3) Прямые скрещиваются. Проведём через $b$ плоскость, параллельную $a$, и спроектируем $a$ на эту плоскость в прямую $a'$. Пусть $r$ — расстояние от проекции $X$ до точки пересечения $a'$ и $b$, $d$ — расстояние от $a$ до плоскости, $\alpha$ — угол между $a'$ и $b$. Тогда искомое расстояние равно $\sqrt{d^2 + r^2\sin^2\alpha}$.

Это значит, что искомое расстояние меняется в зависимости от пройденного пути как корень из квадратичной функции. Её график — ветвь гиперболы, асимптотами которой являются лучи угла из предыдущего пункта.

**12.46.** О т в е т: точка $K$ ближе к плоскости треугольника.

Сделаем сначала замечание, которое объясняет правильный ответ. Точка $L$ удалена от любой вершины не меньше, чем от стороны, содержащей эту вершину, т. е. не меньше, чем на 1. Таким образом, точка $L$ удалена от каждой вершины не меньше, чем точка $K$. Разумеется, это ничего не доказывает.

Для доказательства нужно сделать другое замечание. Точка $K$ равноудалена от вершин, поэтому её проекция равноудалена от вершин. Это значит, что её проекция — центр описанной около треугольника окружности. Аналогично проекция $L$ — центр вписанной в треугольник окружности. Поэтому расстояние от $K$ до плоскости равно $\sqrt{1-R^2}$, а от $L$ до плоскости $\sqrt{1-r^2}$, где $R$ и $r$ — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей.

**12.47.** Пусть $K$ и $L$ — середины рёбер $AB$ и $CD$ соответственно. Рассмотрим треугольник $PKL$. Его высота, проведённая из вершины $P$, совпадает с высотой пирамиды, а две другие высоты — с тем расстоянием, о котором идёт речь в задаче. В этом треугольнике все высоты равны, значит, он равносторонний. Но его сторона $KL$ равна ребру основания пирамиды, а стороны $PK$ и $PL$ — апофемам (высотам боковых граней). Ясно, что боковые рёбра больше апофем.

Итак, боковые рёбра больше, чем рёбра оснований.

**12.49.** Формально говоря, ответ «да». Поставьте любые две треноги как-нибудь и начните раздвигать ноги у той, которая получилась выше. Однако реально, если размеры треног существенно различны, у большей из них, когда мы слишком сильно опустим её, ноги просто разъедутся.

## Задачи к § 13

**13.7.** $KL = R\sqrt{2\sin t\omega + 4\cos t\omega}$, где $R$ — радиус полукругов, $t$ — время, $\omega$ — угловая скорость.

**13.8.** Разложим расстояние от $K$ до $L$ по трём перпендикулярным направлениям: $AB$, $CE$ и $DE$, где $E$ — середина $AB$. Если точки прошли расстояние $x$, то длины проекций $KL$ на указанные прямые равны:

а) $x$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$;

б) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Соответственно зависимость длины $KL$ от $x$:

а) $l(x) = \sqrt{\frac{5}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}}$, минимум достигается при $x = \frac{3}{5}$ и равен $\frac{3}{5}$;

б) $l(x) = \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1}$, минимум достигается при $x = \frac{1}{2}$ и равен $\frac{5}{8} > \frac{3}{5}$.

$\frac{3}{5}$ — действительно кратчайшее расстояние между $AB$ и $CD$ как между прямыми, так и между отрезками. В этом можно убедиться, проверив, что отрезок $KL$ при достижении этого значения перпендикулярен обеим прямым.

**13.9.** См. задачу **10.15**.

**13.11.** Никакой связи нет. Двигая точки $A$ и $B$ вдоль прямой пересечения, можно увеличивать $AB_1$ и $A_1B$, не меняя два других отрезка.

**13.12.** Пусть рёбра спичечного коробка равны $a$, $b$, $c$. Если мы сложим эти два коробка так, чтобы ребро $a$ удвоилось, то диагональ получившегося параллелепипеда будет равна $\sqrt{4a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 3a^2}$. Отсюда видно, что $a$ желательно взять возможно бóльшим.

Ответ: нужно сложить коробки так, чтобы их бóльшая сторона удвоилась.

**13.13.** Можно сделать, например, так. Положите два коробка рядом (чтобы они касались гранями) на угол стола. Теперь если тот коробок, который лежал собственно на углу (одна из его вершин совпадала с углом), убрать, то окажется, что у нас остались «отмечены» точки в пространстве, где находились его противоположные вершины: одна из них — угол стола, а другая — вершина оставшегося коробка. Мы можем измерить линейкой непосредственно это расстояние.

## Задачи к § 14

**14.9.** то плоскость, проходящая через $A$ и перпендикулярная $a$. Для доказательства удобно провести через $A$ прямую $b \parallel a$. Указанные в условии прямые проходят через $A \in b$, перпендикулярны $b$, а значит, образуют плоскость, перпендикулярную $b$ (и $a$).

**14.10.** Такие лучи образуют две перпендикулярные плоскости, каждая из которых является биссектором двугранного угла, образованного α и β. (Биссектор, или биссекторная плоскость, — аналог биссектрисы для двугранного угла.) Для доказательства нужно только заметить, что любая точка этого луча равноудалена от плоскостей α и β и, наоборот, любая равноудалённая от этих плоскостей точка лежит на таком луче.

В учебнике есть более простая аналогичная задача **14.11**.

**14.12.** Если рассмотреть сечение всей конструкции плоскостью, перпендикулярной прямой пересечения, то получится то, что изображено на рисунке 107. Нам известны расстояния $AX$ и $BX$ и угол $P$. Проблема состоит в том, чтобы найти $PX$. Таким образом, задача свелась к планиметрической.

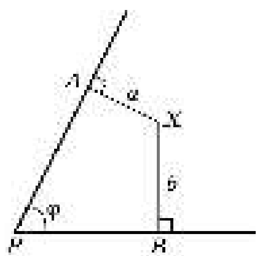


Рис. 107

О т в е т: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}}{\sin\varphi}$.

**14.23.** В обоих пунктах задачи описана одна и та же ситуация, так что данные каждого из них являются ответом к другому. Обнаружить это можно, например, так: в условии пункта «а» если провести через середину $AP$ плоскость, параллельную α, то она пройдёт через $B$ и $C$.

**14.24.** Нарисуем сечение всей конструкции той плоскостью, перпендикулярной ребру, в которой вначале находился луч. Понятно (например, из соображений симметрии), что луч всё время остаётся в этой плоскости (рис. 108). Чтобы луч пошёл обратно в противоположном направлении, нужно, чтобы 180° – 2α + 180° – 2β = 180°. С другой стороны, α + β + γ = 180°. Поэтому угол между плоскостями должен быть равен 90°.

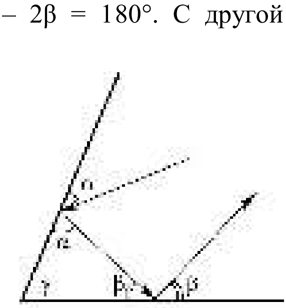


Рис. 108

**14.25.** а) От $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ до 90°. б) От $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ до 90°.

в) От $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ до 90°.

Возможно, проще представлять углы не с высотой $PQ$, а с плоскостью основания. Они, разумеется, дополняют углы с $PQ$ до 90°. Во всех случаях отрезки могут оказаться параллельны основанию, наибольшие же углы достигаются для отрезков: а) $AP$; б) $PE$, где $E$ — середина $AB$; в) $BP$.

**14.27.** От 0° до 90° – φ.

**14.28.** Та, которая перпендикулярна прямой $p$ пересечения α и β. Пусть $a$ — наша прямая, $b$ — её проекция на β. Рассмотрим трёхгранный угол $abp$. По теореме синусов $\dfrac{\sin p}{\sin ab} = \dfrac{\sin b}{\sin ap}$.

Но двугранные углы $p$ и $b$ не зависят от $a$: $p$ — угол между α и β, $b = 90°$. Поэтому $ab$ максимален при максимальном $ap$, т. е. при $ap = 90°$.

**14.31.** Пусть $E$ — середина $AC$. Тогда $BE \perp AC$ (медиана равнобедренного треугольника $ABC$ совпадает с его высотой). Аналогично $DE \perp AC$. Но это значит, что плоскость $BDE \perp AC$ и $BD \perp AC$.

Полезно заметить, что утверждение задачи верно и для плоской ломаной, но в решении использовано, что она неплоская, иначе точки $B$, $D$ и $E$ не задавали бы плоскость.

**14.33.** а) Такая прямая обязана быть параллельна биссектору одного из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

б) Нужно провести две плоскости, параллельные данным, на расстоянии $\sin \varphi_1$ и $\sin \varphi_2$, от них соответственно взять точку на прямой пересечения этих плоскостей, а затем найти на прямой точку пересечения исходных плоскостей на расстоянии 1 от взятой. Прямая, проходящая через эти две точки, и будет искомой.

Задача для трёх плоскостей вполне может оказаться неразрешимой, так как углы с двумя плоскостями определяют угол с третьей (для случая перпендикулярных плоскостей см. задачу **14.27**). Если же она разрешима, то сводится к задаче для двух плоскостей.

**14.34.** Пункты «б» и «в» сводятся к предыдущей задаче, если строить сначала не саму плоскость, а перпендикуляр к ней, а данные прямые заменить на перпендикулярные им плоскости. При этом условия на углы останутся такими же. Пункт «а» является частным случаем пункта «в».

**14.35.** Аналогичную задачу мы уже решали (**14.33** б). Эта задача сводится к ней, если вместо плоскостей рассматривать перпендикулярные им прямые. (Заданные углы заменяются на углы между прямыми очевидным образом.)

**14.39.** Для доказательства равносильности нужно доказать, что из первого утверждения следует второе и, наоборот, из второго — первое.

1) Из 1—2. Если прямые $a$ и $b$ перпендикулярны, построим плоскость α, параллельную им обеим, и прямую $c \perp \alpha$. Плоскость, проходящая через $a$ и параллельная $c$, будет перпендикулярна $b$. Наоборот, плоскость, проходящая через $b$ и параллельная $c$, будет перпендикулярна $a$.

2) Из 2—1. Если через $a$ проходит плоскость, перпендикулярная $b$, то $b \perp a$, поскольку $a$ — прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярной $b$.

**14.40.** Если обозначить искомый угол через $\varphi_3$, то $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 2$, откуда нетрудно найти искомый угол.

Для доказательства этого равенства обозначим $\psi_1 = 90° - \varphi_1$, $\psi_2 = 90° - \varphi_2$, $\psi_3 = 90° - \varphi_3$ — углы между $a$ и перпендикулярами к $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ соответственно. Осталось воспользоваться результатом задачи **13.2**:

$$\cos^2\psi_1 + \cos^2\psi_2 + \cos^2\psi_3 = 1,$$
$$\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3 = 1,$$
$$1 - \cos^2\varphi_1 + 1 - \cos^2\varphi_2 + 1 - \cos^2\varphi_3 = 1,$$
$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 2.$$

**14.43.** Пусть прямые $a$, $b$ и $x$ проходят через одну точку (если это не так, будем рассматривать параллельные им прямые, углы от этого не изменятся). Рассмотрим трёхгранный угол $abx$. Найдём по теореме косинусов его двугранный угол $a$:

$$\cos a = \frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi\cos\varphi_1}{\sin\varphi\sin\varphi_1}.$$

Обозначим через $x'$ проекцию $x$ на плоскость $\alpha$. Рассмотрим трёхгранный угол $axx'$. В нём двугранный угол $x' = 90°$, а плоский угол $ax = \varphi_1$. По теореме синусов $\sin(xx') = \dfrac{\sin(ax)\sin a}{\sin x'} = \sin(ax)\sin a$, откуда можно выразить искомый угол $xx'$.

**14.44.** В такой формулировке в задаче не хватает данных. Вот если дан ещё угол $\alpha\beta = \varphi$, то эта задача сводится к предыдущей. Если перейти от плоскостей $\alpha$ и $\beta$ к перпендикулярам к ним, а от прямой пересечения — к перпендикулярной ей плоскости, то все углы просто заменятся на дополнительные до 90°, а условие станет таким, как в предыдущей задаче.

**14.49.** Эта проекция совпадает с биссектрисой угла, образованного прямыми пересечения третьей плоскости с двумя первыми.

Это не слишком сложно доказать вычислениями, воспользовавшись, например, теоремой Пифагора для трёхгранных углов. Нужно рассмотреть два трёхгранных угла, каждый из которых образован прямой пересечения двух первых плоскостей, её проекцией на третью плоскость и ещё одной прямой пересечения. Оба они прямоугольные, один плоский угол («катет») у них общий, а «гипотенузы» равны. Это значит, что и оставшиеся «катеты» равны между собой. Такое рассуждение нетрудно обратить, так что обратное утверждение тоже верно.

Однако полезнее, возможно, заметить, что конструкция симметрична и поэтому проекция обязана совпасть с биссектрисой.

**14.50.** Да. Спроектируйте грань $ABC$ правильного тетраэдра $ABCD$ на плоскость, проходящую через $AB$ и середину $CD$.

**14.51.** Нет. Можно нарисовать несколько плоскостей, образующих равные (но разные для разных случаев) углы с двумя данными плоскостями. В каждой из них можно выбрать подходящий треугольник, но площади этих треугольников будут разными.

**14.54.** Достаточно заметить, что $a_1 = a\cos\varphi$, $b_1 = b\cos\varphi$, где $\varphi$ — угол между прямыми.

**14.62.** Задача на построение снова сводится к уже решённой задаче **14.33**, опять той же заменой прямых на плоскости.

**14.64.** Во всех трёх случаях ответ «да».

а) Возьмём три точки на рёбрах угла на равных расстояниях от вершины и рассмотрим пересечения указанных плоскостей с треугольником с вершинами в этих точках. Получается три отрезка — три медианы треугольника. Они пересекаются в одной точке, поэтому у трёх данных плоскостей есть уже две общие точки. Значит, у них есть и общая прямая.

б) Рассуждение совпадает с тем, которое мы привели в пункте «а», но в этот раз линии пересечения — срединные перпендикуляры.

в) Ясно, что в этот раз речь идёт в каком-то смысле о «высотах» трёхгранного угла. Однако попытки впрямую повторить то, что сделано в двух других пунктах, не приносят желаемого результата. Большинство путей, по-видимому, довольно громоздки, и самый простой путь — воспользоваться теоремой Чевы.

**14.65.** а) Нет. Можно представить себе трёхгранный угол, у которого один двугранный угол «очень тупой», а два других «очень острые».

б) Утверждение про 360°, очевидно, неверно. Что касается 180°, то это утверждение верно. Удобно доказать его сначала для прямоугольного трёхгранного угла. (Любой трёхгранный угол составляется из двух прямоугольных, при этом если суммы их углов $S_1 > 180°$ и $S_2 > 180°$, то сумма углов объединения $S_1 + S_2 - 180° > 180°$.)

Для прямоугольного угла обозначим двугранные углы $a$, $b$, $c$, каждый из них 90°, а соответствующие плоские углы — $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.

Нам нужно доказать, что $a + b > 90°$.  то эквивалентно тому, что $\sin^2 a + \sin^2 b > 1$.

По теореме Пифагора $\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma$. Запишем теперь теорему синусов и проделаем некоторые преобразования:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2 b}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\gamma}, \qquad \frac{\sin^2 a}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2 b}{1-\cos^2\beta} = \frac{1}{1-\cos^2\gamma},$$

$$\frac{\sin^2 a}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2 b}{1-\cos^2\beta} = \frac{1}{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta},$$

$$\sin^2 a + \sin^2 b = = \frac{1-\cos^2\alpha\ + 1-\cos^2\beta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta} = 1 + \frac{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta} > 1.$$

**14.66.** Самое главное свойство — все его двугранные углы тоже прямые.

**14.67.** ту задачу можно решить с помощью вычислений, но у неё есть и неожиданно красивое объяснение. Расположите точки *A*, *B*, *C*, *P* и *Q* в вершинах куба, как показано на рисунке 109. Все условия выполнены, и угол *APQ* равен 45°.

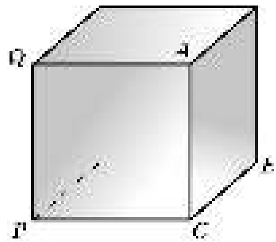


Рис.109

**14.68.** Обязательно тупым. Воспользуемся теоремой, двойственной к теореме косинусов: $\cos c = -\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$.

Тогда $\cos \gamma$ отрицателен, а $\cos a$, $\cos b$ и $\sin a$, $\sin b$ положительны, поэтому $\cos c$ отрицателен.

## Задачи к § 15

**15.12.** По-видимому, если решать эту задачу в общем виде, ничего интересного не получится, поэтому приведём только путь решения.

Прежде всего будем искать не тот угол, о котором спрашивается в задаче, а угол между плоскостью, на которой лежат шары, и плоскостью, которая проходит через их центры. Искомый угол в 2 раза больше этого.

Мы можем найти расстояния между точками касания. Проведём из этих точек перпендикуляры к плоскости на длины, равные радиусам шаров, и найдём центры. Проводя прямые через пары центров, мы можем отыскать 3 точки на прямой пересечения плоскостей. Проведём эту прямую. Оставшееся совсем просто. Найдём расстояние от одной из точек касания до этой прямой. Отношение радиуса соответствующего шара к этому расстоянию будет тангенсом интересующего нас угла.

**15.13.** Нужно нарисовать сечение всей конструкции плоскостью, проходящей через центр шара и перпендикулярной α и β. Это сведёт задачу к точно такой же, но планиметрической. Возможная идея её решения показана на рисунке 110.

О т в е т: $R\operatorname{ctg}\varphi + \dfrac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\sin\varphi}$.

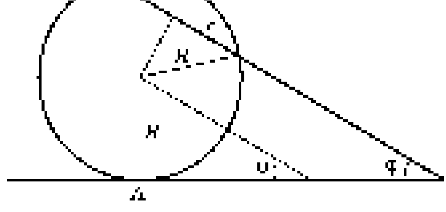


Рис.110

**15.15.** а) Таких окружностей две — одна касается этих трёх внешним образом, а другая — внутренним. Их радиусы $1\square\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Для вычисления удобно пойти следующим путём. Рассмотрим трёхгранный угол с вершиной в центре сферы и рёбрами $a$, $b$, $c$, причём $a$ — луч из центра сферы в центр одной из трёх равных окружностей, $b$ — луч из центра сферы в центр новой окружности, $c$ — луч из центра сферы в точку касания равных окружностей. Тогда двугранные углы $b = \frac{360°}{6}$, $c = 90°$. Плоский угол $ac = 30°$ (это следует из данных задачи). Далее по теореме синусов найдём плоский угол $ab$. Искомый радиус виден из центра сферы под углом $ab \pm 30°$. Отсюда можно найти и сам радиус.

б) Удобно нарисовать правильный тетраэдр и 4 окружности, вписанные в его грани. Они попарно касаются и лежат на сфере с центром в центре тетраэдра. Теперь нахождение ответа — дело техники: $R = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

**15.17.** Поскольку отрезки $AX$ и $BX$ имеют с шаром по одной общей точке ($A$ и $B$ соответственно), то углы $OAX$ и $OBX$, как минимум, прямые. Это даёт нижнюю границу для $OX$. Верхняя граница достигается, когда точки $O$, $A$, $B$ и $X$ лежат в одной плоскости.

Ответ: $OX \in \left[5,\ \sqrt{15}+\sqrt{8}\right]$.

**15.20.** а) 4. б) 8. в) Можно получить 15 частей, если сфера касается всех рёбер куба.

**15.21.** Нижняя граница достигается, когда отрезок касается шара, а верхняя — когда отрезок лежит на одной прямой с центром шара. (Эта задача довольно похожа на задачу **15.20**.)

Ответ: от $d$ до $\sqrt{2dR+d^2}$.

**15.22).** а) $r = R\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$. б) $r = R\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. в) Заранее ясно, что радиус второго шара больше, поскольку второй шар заведомо удовлетворяет условиям пункта «а».

**15.25.** Проведём окружность через эти три общие точки. Данная окружность лежит в этой плоскости, пересечение сферы и плоскости тоже окружность, лежащая в этой плоскости. Если две окружности лежат в одной плоскости и имеют три общие точки, то они совпадают.

**15.33.** Ответ: этот угол прямой. Обратно, если угол между касательными к большим окружностям прямой, то эти окружности лежат в перпендикулярных плоскостях.

Вместо того чтобы доказывать эти два факта по отдельности, докажем более общее утверждение, из которого сразу следуют оба наших факта: угол между касательными к большим окружностям, проведёнными через их общую точку, равен углу между плоскостями, в которых лежат эти окружности. Доказательство становится очевидным, если заметить, что прямая пересечения плоскостей проходит через центр шара (обе плоскости проходят через центр шара), поэтому обе касательные перпендикулярны ей.

**15.34.** а) Углы $AXC$ и $BXD$ являются острыми (прямыми, тупыми) одновременно.

Проведём окружность, описанную около данного прямоугольника, и сферу, в которой эта окружность — окружность большого круга. Диагонали прямоугольника являются диаметрами этой сферы, так что свойство угла $AXC$ (равно как и $BXD$) быть острым (прямым, тупым) эквивалентно тому, что точка $X$ находится снаружи сферы (на поверхности сферы, внутри сферы).

б) Опишем сферу вокруг куба. Диагонали куба будут диаметрами этой сферы, так что они видны из вершин куба (лежащих на сфере) под прямыми углами, а из всех остальных точек куба (лежащих внутри сферы) — под тупыми.

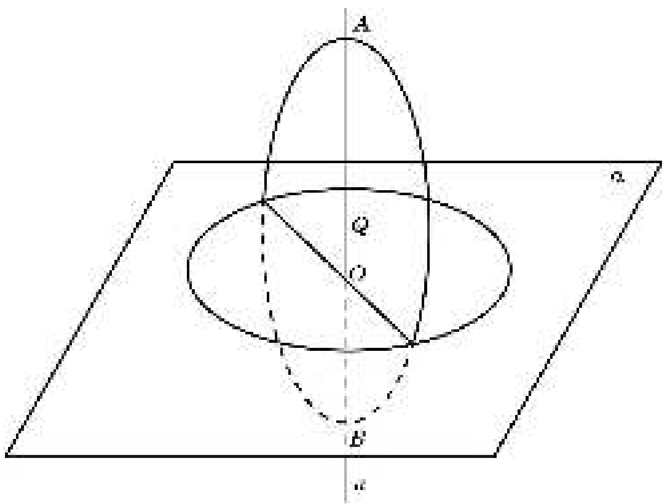



Рис.111

**15.35.** Да. Возьмём какую-нибудь плоскость α, пересекающую нашу фигуру (по кругу), и рассмотрим перпендикулярную ей плоскость, проходящую через центр $O$ круга на α (рис. 111). Пересечение новой плоскости с фигурой снова круг. Обозначим его центр через $Q$, прямую, проходящую через $O$ и перпендикулярную α, через $a$. $Q \in a$, поскольку хорда, получающаяся в пересечении двух кругов, перпендикулярна $a$ и делится точкой пересечения ($O$) пополам. Концы диаметра, лежащего на $a$, назовём $A$ и $B$. Все плоскости, проходящие через $O$ и перпендикулярные α, содержат прямую $a$ и точки $A$ и $B$, кроме того, центры лежащих в них кругов расположены на $a$. Поэтому все центры таких кругов совпадают (а значит, совпадают с точкой $Q$). Из этого следует, что исходная фигура — шар с центром $Q$.

**15.36.** Задача ничуть не изменится, если спрашивать про круги и прямые на плоскости.

а) Если считать, что шары не могут пересекаться, то ответ всегда «да».

б) А вот здесь такая плоскость существует не всегда. На рисунке 112 показана ситуация, когда три шара расположены вдоль одной прямой, причём средний из них меньше двух других и касательной плоскости нет. Та же ситуация возникнет, если средний шар больше других.

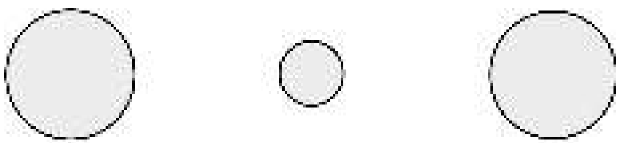


Рис. 112

**15.37.** Все пункты этой задачи легко сводятся к аналогичным планиметрическим.

О т в е т: а) $\arccos \dfrac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$. б) $2\arcsin \dfrac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$. в) Это совсем несложно, прямая пересечения просто параллельна α.

**15.39.** Видимо, есть очень много причин для этого, далеко не последнюю роль играет традиция. (Кстати, для игры в регби традиционно используется мяч в виде вытянутого эллипсоида, а для игры в бадминтон вовсе не шарообразный волан.) Приведём несколько возможных «геометрических» причин.

Шарообразный мяч катится гораздо лучше, чем мяч любой другой формы, поскольку при качении по плоскости его центр масс не перемещается в вертикальном направлении и, следовательно, потенциальная энергия мяча не меняется.

Вследствие симметричности мяча усилия, приходящиеся на все его участки, одинаковы, и мяч реже рвётся.

Если бы мяч имел углы, при игре им, вероятно, проще было бы получить травму.

**15.41.** Пусть $(n - 1)$-я плоскость уже проведена. При проведении $n$-й плоскости количество частей увеличивается на столько же, на сколько частей делится новая окружность на сфере старыми. А это число, в свою очередь, равно числу точек пересечения новой окружности со старыми. Таких точек (по условию никакие три окружности не пересекаются в одной точке) ровно $2(n - 1)$. Поэтому для получения ответа осталось найти сумму $2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \ldots + 2(n - 1)$. Окончательную формулу можно доказать по индукции или получить, используя формулу суммы арифметической прогрессии.

О т в е т (для общего случая). $n$ плоскостей ($n > 0$) делят сферу на $2 + n(n - 1)$ частей.

**15.42.** Ответим сначала на последний вопрос. Да, суммы противоположных сторон ломаной равны, это доказывается так же, как и факт, что суммы противоположных сторон в описанном четырёхугольнике равны. Отрезки от вершины ломаной до двух точек касания равны между собой, а в обеих суммах участвует по одному такому отрезку от каждой вершины.

Обозначим теперь вершины ломаной $A$, $B$, $C$, $D$, а соответствующие отрезки — $a$, $b$, $c$, $d$. Проведём теперь плоскость α через три точки — точки касания сферы с отрезками $AB$, $BC$ и $CD$. Запишем отношения расстояний от вершины до плоскости α: $\frac{A\alpha}{B\alpha} = \frac{a}{b}$, $\frac{B\alpha}{C\alpha} = \frac{b}{c}$, $\frac{C\alpha}{D\alpha} = \frac{c}{d}$. Перемножим эти соотношения и получим, что $\frac{A\alpha}{D\alpha} = \frac{a}{d}$. Но это значит, что α делит $AD$ в отношении $a : d$, т. е. проходит через точку касания прямой $AD$ и сферы.

## Задачи к § 16

**16.2.** Наиболее известным примером такой фигуры является треугольник Рело (*Franz Reuleaux* — немецкий учёный-механик второй половины XIX в.). Это фигура, которая ограничена тремя дугами окружностей, центром каждой из которых является вершина правильного треугольника, а концами — другие две вершины этого же треугольника (рис. 113).

Можно построить другие аналогичные фигуры на плоскости, начав не с правильного треугольника, а с правильного $n$-угольника с любым нечётным $n$.

Обобщение в пространстве получается, если взять правильный тетраэдр и провести 4 шара с центрами в вершинах тетраэдра и радиусами, равными ребру тетраэдра. Пересечение этих шаров — фигура именно с такими свойствами.

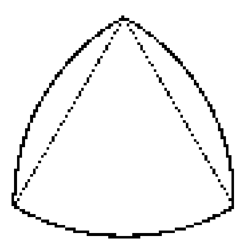


Рис.113

**16.8.** О т в е т: а) 1. б) 1. в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

П о д с к а з к и. б) Две противоположные вершины прямоугольника обязаны лежать на опорных прямых, а угол между этими прямыми и диагональю не может быть меньше угла между стороной прямоугольника и диагональю. в) Ширина треугольника равна наименьшей из его высот. (См. учебник для 8—9 классов.)

**16.9.** О т в е т: а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. б) $1+\sqrt{3}$. в) $1+\sqrt{5}$.

П о д с к а з к и. а) Диаметр многоугольника равен длине наибольшего отрезка, соединяющего его вершины (задача **16.6**).

б) Если $A$ и $B$ — точки в треугольнике и полукруге соответственно, $C$ — середина диаметра полукруга, то $AB \leqslant AC + BC \leqslant \sqrt{3}+1$.

в) Аналогично «б».

**16.11.** Пусть проекции фигуры $F$ на три перпендикулярные плоскости ограничены, их диаметры равны $d_1$, $d_2$ и $d_3$. Возьмём произвольные точки $A$ и $B$, принадлежащие $F$. Обозначим их проекции на эти три плоскости $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $B_1$, $B_2$, $B_3$ соответственно. По теореме Пифагора $AB^2 = \frac{1}{2}\left(A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2\right) \leqslant \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$. Это значит, что фигура $F$ ограничена, её диаметр не больше $\sqrt{\frac{1}{2}\left(A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2\right)}$.

**16.12.** Если провести две параллельные прямые к фигуре, то расстояние между ними будет не больше диаметра фигуры. Действительно, если это расстояние больше диаметра, то и расстояние между точками фигуры, лежащими на этих прямых, больше диаметра, а это противоречит определению диаметра. Нам нужно только выбрать два перпендикулярных направления и провести в этих направлениях по две опорные прямые. Стороны получившегося прямоугольника не превосходят 1, поэтому он искомый.

**16.14.** Допустим, что это не так. Тогда по обе стороны от прямой, проходящей через $B$ и перпендикулярной $AB$, есть точки фигуры $F$ (рис. 114). Возьмём точку $C \in F$, находящуюся с той же стороны от этой прямой, что и $A$. Угол $ABC$ — острый, поэтому найдётся такая точка $X$ на отрезке $BC$, что угол $AXB$ — тупой. Тогда, с одной стороны, $X \in F$ (поскольку $F$ выпуклая), а с другой — $AX < AB$ (в треугольнике $ABX$ наибольший угол — $X$). Итак, $B$ не ближайшая к $A$ точка фигуры $F$, т. е. мы пришли к противоречию.

Следует отметить, что вовсе не обязательно $AC < BC$, так что выпуклость $F$ использована по существу, для невыпуклой фигуры $F$ утверждение могло быть неверно.

Аналогичное утверждение с тем же в точности доказательством верно и в пространстве, нужно только заменить слово «прямая» на слово «плоскость».

**16.15.** Это утверждение и его обобщение в пространстве автоматически следуют из предыдущей задачи. Нужно заметить только, что $B$ — ближайшая к $A$ точка фигуры $F_2$ (поэтому прямая, проходящая через $B$ и перпендикулярная $AB$, является опорной для фигуры $F_2$), и, наоборот, $A$ — ближайшая к $B$ точка фигуры $F_1$.

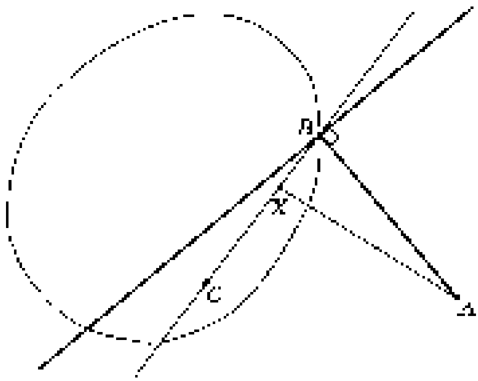



Рис. 114

**16.16.** Выберем четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$, каждая из которых является общей для трёх фигур: $A \in F_1 \cap F_2 \in F_3$, $B \in F_1 \cap F_2 \cap F_4$, $C \in F_1 \cap F_3 \cap F_4$, $D \in F_2 \cap F_3 \cap F_4$. Рассмотрим возможные варианты их расположения (рис. 115).

1) Три точки (на рис. 115, *а* $A$, $B$ и $C$) лежат на одной прямой. Заметим, что $A \in F_3$ и $C \in F_3$, поэтому весь отрезок $AC \subset F_3$ (в силу выпуклости $F_3$), значит, $B \in F_3$ и $B$ — искомая точка.

2) Три точки ($A$, $B$, $C$ на рис. 115, *б*) расположены в вершинах треугольника, а четвёртая точка — внутри его. $A$, $B$, $C \in F_1$, поэтому весь треугольник содержится в $F_1$ и $D \in F_1$. Таким образом, $D$ лежит во всех четырёх фигурах.

3) Все четыре точки лежат в вершинах выпуклого четырёхугольника (рис. 115, *в*). Посмотрим на точку $O$ пересечения диагоналей этого

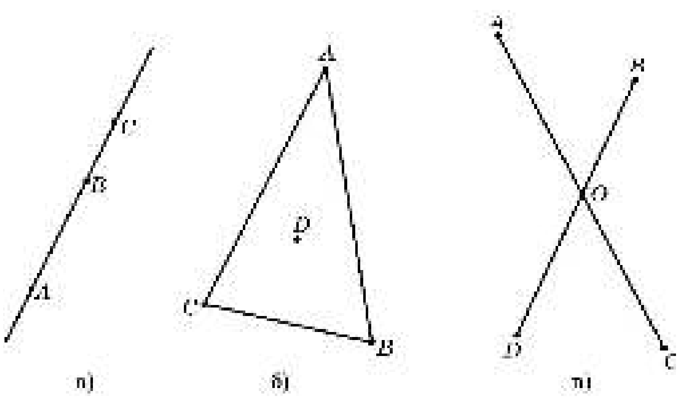


Рис. 115

четырёхугольника. Докажем, что $O \in F_1$. Действительно, $A$, $C \in F_1$, точка $O$ лежит на отрезке $AC$ и фигура $F_1$ выпуклая. Аналогично $O \in F_2$ (так как $B$, $D \in F_2$), $O \in F_3$ (так как $A$, $C \in F_3$), $O \in F_4$ (так как $B$, $D \in F_4$). Итак, $O$ — общая точка для всех четырёх фигур. Для невыпуклых фигур это утверждение, разумеется, неверно (пример приведён на рис. 116). Интересно отметить два факта:

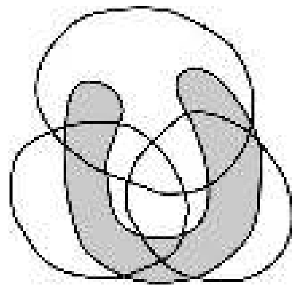


Рис. 116

1) Если на плоскости есть $n$ фигур и любые три из них имеют общую точку, то все $n$ фигур имеют общую точку. Это можно доказать по индукции, используя наше предыдущее рассуждение. (Любые четыре фигуры $F_1$, $F_2$, ..., $F_{n+1}$ имеют общую точку, поэтому любые три из них

$$F_1, F_2, ..., F_{n-1}, F_n \cap F_{n+1}$$

имеют общую точку, но по индукционному предположению все они имеют общую точку и она искомая.)

2) В пространстве верно аналогичное утверждение (с аналогичным доказательством) с заменой в условии числа 3 на 4.

**16.17.** Нет. Если $AC$ и $BD$ — параллельные диаметры (рис. 117), то по крайней мере один из отрезков $BC$ и $AD$ длиннее $AC$ (по крайней мере одна из диагоналей параллелограмма длиннее его стороны). Но это противоречит тому, что $AC$ — диаметр.

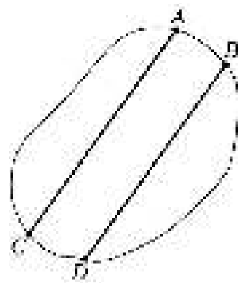



Рис. 117

**16.18.** Нет. Допустим, что такая фигура существует и все её сечения умещаются в круге радиуса $R$. Поскольку фигура неограничена, в ней найдутся две точки на расстоянии, большем $2R$. Любое сечение, проходящее через эти две точки, не может быть заключено в круг радиуса $R$. Противоречие.

**16.19.** О т в е т: а) Да. б) Нет. в) Нет. г) Нет. д) Да.

П о я с н е н и я. б) Через отверстие не сможет пройти прямоугольник со сторонами $\sqrt{5}$ и 3, а такой прямоугольник содержится в нашем параллелепипеде (проходит через два соседних ребра длины 3). Доказательство того, что прямоугольник не может пройти через отверстие, аналогично доказательству из следующего пункта.

в) Через отверстие не сможет пройти правильный треугольник со стороной 3. Действительно, допустим, что такой треугольник может пройти через наше отверстие. Пронумеруем его вершины в порядке прохождения через отверстие: 1, 2, 3. Когда вершина 2 проходит через плоскость отверстия, вершины 1 и 3 находятся по разные стороны от неё. Значит, эта плоскость пересекает треугольник по отрезку, проходящему через вершину 2. Но длина такого отрезка не меньше высоты треугольника $\frac{3\sqrt{3}}{2} > 2$, т. е. больше диаметра. Противоречие.

г) В этот раз любое сечение данного тела может пройти через отверстие. Но если представить себе, как может проходить через отверстие боковая грань (квадрат со стороной 2), то понятно, что всё тело пройти не сможет. (Строгое доказательство в стиле предыдущего пункта получить не очень сложно, но оно вряд ли прояснит ситуацию.)

д) Если посмотреть на эту пирамиду «сбоку» (или, говоря «строгим» языком, если спроектировать её на плоскость, перпендикулярную основанию и двум противоположным боковым граням), то мы увидим равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 2. Он пройдёт через данное отверстие.

**16.23.** а) Да, будет. Возьмём любые две точки $B$, $C$ в новой фигуре (рис. 118). Нужно доказать, что отрезок $BC$ лежит в новой фигуре. Пусть $B \in AB'$, $C' \in AC'$, где $B'$, $C' \in F$. Заметим, что весь треугольник $AB'C'$ лежит в новой фигуре, а отрезок $BC$ лежит в этом треугольнике. Для невыпуклой фигуры утверждение, разумеется, неверно.

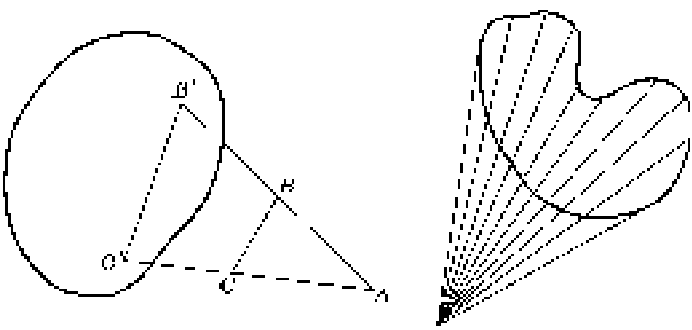


Рис. 118

б) Снова ответ «да» и рассуждение аналогичное, только вместо треугольника выступает четырёхугольник. Для невыпуклых фигур контрпример приведён на рисунке 119.

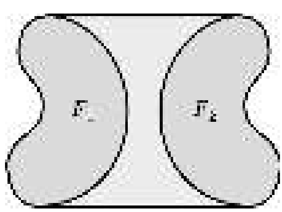



Рис. 119

Для середин отрезков ответ снова «да», но рассуждение несколько тоньше. Пусть $A_1$, $B_1 \in F_1$, $A_2$, $B_2 \in F_2$, точки $A$ и $B$ — середины $A_1A_2$ и $B_1B_2$ соответственно. Возьмём какую-нибудь точку $C$ на отрезке $AB$. Нам нужно доказать, что $C$ — середина некоего отрезка $C_1C_2$ с концами в $F_1$ и $F_2$ соответственно. Для этого в качестве $C_1$ и $C_2$ можно взять точки, делящие $A_1B_1$ и $A_2B_2$ в том же отношении, в котором $C$ делит $AB$.

Чтобы доказать, что $C$ — середина $C_1C_2$, проще всего воспользоваться техникой векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_2A} + \overrightarrow{BB_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}).$$

Теперь, если $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, то

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\alpha \cdot \overrightarrow{A_1B_1} + \alpha \cdot \overrightarrow{A_2B_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_2C_2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{A_2C_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AC_2}).$$

**16.24.** Рассмотрим множество точек, находящихся на расстоянии не больше 1 от отрезка $CD$. Эта фигура состоит из цилиндра радиуса 1 с осью $CD$ и двух полушаров радиуса 1, прилегающих к основаниям цилиндра. Это выпуклая фигура, она содержит точки $A$ и $B$. Значит, она содержит и лежащую на отрезке $AB$ точку $K$. Но тогда точка $K$ удалена от отрезка $CD$ на расстояние не больше 1, т. е. искомая точка $L$ найдётся.

Такое решение соответствует теме параграфа, однако существуют и другие решения, которые позволяют явно предъявить точку $L$. Приведём два пути решения, которые начинаются именно с этого предъявления.

1) Если обозначить $k = \dfrac{AK}{AB}$, то $\overrightarrow{KL} = (1 - k) \cdot \overrightarrow{AC} + k \cdot \overrightarrow{BD}$. Поэтому $KL \leqslant (1 - k) \cdot AC + k \cdot BD = 1$.

2) Если две точки движутся с равными скоростями по прямым, то расстояние между ними меняется по закону вида $\sqrt{at^2 + bt + c}$, где $a \geqslant 0$, $b$, $c$ — некие параметры. Но если такая функция имеет два одинаковых значения в разных точках, то либо она константа, либо все её значения между этими точками меньше значений на концах отрезка.

## Задачи к § 17

**17.7.** а) 4. б) 8. в) 15. Ответ никак не изменится, если вместо цилиндра взять любую выпуклую неплоскую фигуру. Например, всё пространство.

**17.15.** Можно рассмотреть разные расположения цилиндра: 1) цилиндр «закатили» в угол; 2) цилиндр стоит основанием на одной из граней угла, второе основание имеет общую точку со второй гранью; 3) цилиндр лежит образующей на одной из граней угла, при этом образующая перпендикулярна ребру угла. Разумеется, это не все варианты, но уже их рассмотрение достаточно содержательно. Оказывается, что при разных значениях параметров цилиндра и угла разные варианты дают оптимальный результат. Приведём значения искомого расстояния в трёх указанных случаях в зависимости от радиуса цилиндра $R$, его высоты $h$ и величины угла φ:

$$1)\ 2R\left(\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}-1\right).\quad 2)\ 2h\ \mathrm{ctg}\ \varphi.\ 3)\ 2R\ \mathrm{ctg}\ \varphi.$$

**17.16.** Оси цилиндров параллельны, если рассмотреть проекцию на плоскость, перпендикулярную этим осям, то получатся два касающихся круга. Опорная плоскость, про которую говорится в условии, спроектируется при этом в прямую, проходящую через точку касания и касающуюся одного из кругов. Но тогда она касается и второго круга.

**17.18.** Половина такой фигуры изображена на рисунке 120. (Линии излома — эллипсы.) Она, разумеется, выпуклая как пересечение двух выпуклых фигур. Диаметр этой фигуры равен длинам больших осей эллипсов и равен $2R\sqrt{2}$, где $R$ — радиус цилиндров.

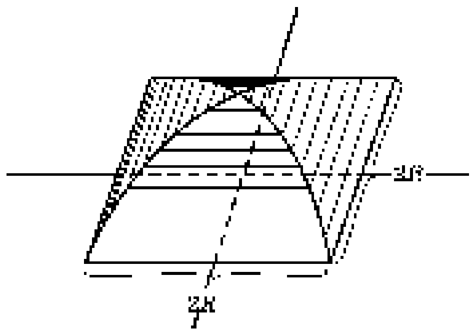



Рис. 120

**17.20.** Задача поставлена нестрого, поскольку неясно, о каком цилиндре идёт речь: можно представлять себе в качестве такого цилиндра велосипедную спицу, а можно — колонну. В первом случае есть смысл воспользоваться штангенциркулем, а во втором можно, например, попытаться обвязать колонну верёвкой, а потом измерить длину этой верёвки. Мы получим длину окружности основания. Имеет смысл пообсуждать эту задачу в такой формулировке: придумайте какой-нибудь реальный цилиндр и предложите способ измерения его радиуса.

**17.21.** Есть несколько решений этой задачи. Можно, например, спроектировать всю конструкцию на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Если прямая не совпадает с образующей, то у нас получится прямая, пересекающая окружность в трёх точках. Этого, разумеется, не бывает.

Другое решение состоит в том, чтобы провести через нашу прямую плоскость. В сечении получатся эллипс и прямая, дважды его пересекающая. Докажем, что это невозможно. Введём какую-нибудь систему координат на плоскости. Эллипс задаётся уравнением второго порядка (см. § 19). Прямая задаётся уравнением вида $y = kx + b$. Теперь посмотрим на точки их пересечения. Они должны удовлетворять обоим уравнениям. Подставим в уравнение эллипса вместо $y$ выражение $kx + b$. У нас получится квадратное уравнение относительно $x$, но оно имеет не больше двух корней.

## Задачи к § 18

**18.11.** Можно, например, провести образующие через эти точки, измерить расстояние от точек до вершины и длину дуги между концами образующих. Последняя даст возможность найти угол между образующими, после чего останется найти сторону треугольника, в котором известны две другие стороны и угол между ними.

**18.17.** Такое сечение — равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна $L$, а основание меняется от 0 до $2R$. Если $2R \leqslant L\sqrt{2}$, то при увеличении основания площадь возрастает и о т в е т: от 0 до $R\sqrt{L^2 - R^2}$. Если же $2R > L\sqrt{2}$, то площадь возрастает, пока угол при вершине треугольника не становится равным 90° (это происходит при $2R = L\sqrt{2}$ ), а затем убывает. Тогда о т в е т: от 0 до $\dfrac{L^2}{2}$.

**18.19.** Проведём плоскость через оси конусов. У нас получатся два равнобедренных треугольника с общей вершиной (рис. 121). Проведём прямую через эту общую вершину, чтобы треугольники оказались по разные стороны от неё. Проходящая через эту прямую плоскость, перпендикулярная плоскости сечения, является искомой. (Действительно, конусы находятся по разные стороны от неё, так как при проекции на плоскость сечения они переходят как раз в те же треугольники.)

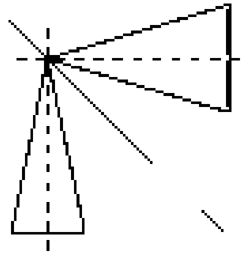


Рис. 121

**18.21.** Эта задача довольно сложное упражнение для проверки технических навыков. Нужно только заметить, что угол удобнее считать, как это часто бывает, не между плоскостями, а между перпендикулярами к ним (перпендикуляр к опорной плоскости, проведённый из точки на прямой касания, пересекает ось конуса).

а) $2\arcsin\dfrac{\sin\dfrac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}$. б) $\operatorname{arcctg}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{\dfrac{1-\sin^2\dfrac{\varphi_1}{2}}{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}}}$.

**18.22.** Такая ситуация возможна тогда и только тогда, когда угол при вершине конуса не превосходит угла между плоскостями. Приведём планы доказательства того, что это действительно необходимое и достаточное условие.

1. *Необходимость*. Проведём осевое сечение конуса, перпендикулярное биссектору данных плоскостей. В пересечении с данными плоскостями плоскость сечения образует угол, который: 1) больше угла при вершине конуса; 2) меньше угла между плоскостями.

2. *Достаточность*. Поместим конус так, чтобы его вершина лежала на прямой пересечения плоскостей, а ось находилась на биссекторе этих плоскостей, причём была перпендикулярна прямой пересечения. Теперь, зафиксировав вершину, начнём наклонять ось, чтобы она всё время оставалась на биссекторе. В какой-то момент конус коснётся обеих плоскостей одновременно.

**18.23.** Можно найти высоту, например, измерив диаметры двух сечений, параллельных основанию, и расстояние между ними (см. замечание к задаче **17.20**).

**18.25.** С точки зрения земного наблюдателя, Солнце движется по окружности. Его лучи, проходящие через конец палочки, образуют конус. Так что линия тени — сечение конуса. Эта линия неограничена (чем ниже Солнце над горизонтом, тем длиннее тень). Кроме того, если Земля была бы прозрачна и мы могли бы видеть ту часть линии, которая должна появиться ночью, то линия состояла бы из двух компонент. Поэтому о т в е т : эта линия — одна из ветвей гиперболы.

**18.26.** Поскольку вершина неподвижна, а центр основания находится всё время на одной высоте, ось опишет при таком движении поверхность конуса (боковую). Центр основания опишет соответственно окружность. Чтобы конус вернулся в прежнее положение, нужно, чтобы в прежнее положение вернулся конец образующей, который вначале лежал на плоскости. Но он прошёл, с одной стороны, путь $2\pi L \cdot n$, где $L$ — длина образующей конуса, $n$ — целое число (количество обходов окружности центром основания конуса).

С другой стороны, этот путь $2\pi R \cdot k$, где $R$ — радиус основания, $k$ — число (целое) оборотов конуса. Приравняв эти два выражения, получим, что $\dfrac{R}{L}=\dfrac{n}{k}$. Так что необходимое и достаточное условие для ответа «да» на последний вопрос состоит в том, что $\dfrac{R}{L}$ — рациональное число.

**18.27.** См. второе решение задачи **17.21**.

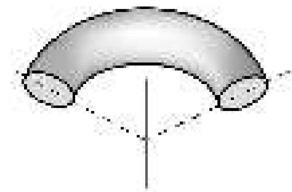


Рис. 122

## Задачи к § 19

**19.8.** Можно взять, например, кусок тора (точнее, полнотория; поверхность называют тором, а тело — полноторие), ось которого совпадает с данной прямой, отрезанный двумя плоскостями, как показано на рисунке 122. Все сечения этого тела, проходящие через ось полнотория, — круги одинакового радиуса.

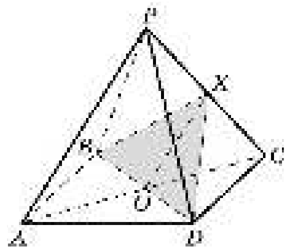



Рис. 123

**19.10.** Точка $X$ равноудалена от $A$ и $C$, поэтому она лежит на плоскости серединных перпендикуляров к $AC$. Аналогично $X$ лежит на плоскости серединных перпендикуляров к $BP$. Но пересечение этих плоскостей — прямая, проходящая через середины $AC$ и $BP$. Обозначим через $X$ расстояние от $BP$ до $X$. (Мы будем брать $X$ со знаком, считая, что при движении $X$ от $BP$ к $AC$ $x < 0$.) Пусть ребро тетраэдра равно 1. Тогда $XP = \sqrt{x^2+1}$, $XA = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2+1}$. Отсюда при $XA = \sqrt{3}XP$ найдём, что $x = 0$ или $x = \sqrt{2}$. В первом случае точка $X$ лежит на границе тетраэдра, а во втором случае — вне его.

Итак, точка $X$ лежит не внутри тетраэдра.

**19.11.** а) Эта точка лежит вне пирамиды. Действительно, множество точек, равноудалённых от $P$ и $C$, — плоскость, проходящая через середину $PC$, $B$ и $D$. Легко заметить, что ближайшая к $A$ точка внутри этой плоскости — центр основания $O$. Но $AO = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2$ (рис. 123).

На самом деле это ещё не решение. Может оказаться, что такой точки вообще не существует. Для доказательства существования заметим следующее. Множество точек, равноудалённых от $P$ и $C$, — плоскость α, перпендикулярная $PC$. С другой стороны, $PC \perp PA$, поэтому $PA \parallel \alpha$ и $|A\alpha| = |P\alpha| = 1{,}5 < 2$. Значит, на плоскости α есть точки, удалённые от $A$ на расстояние 2.

**19.14.** Заметим, что если точка равноудалена от вершин (сторон) одной из граней, то её проекция на плоскость этой грани также равноудалена от вершин (сторон) этой грани. (Это следует из того, что расстояние от точки до фигуры на плоскости может быть найдено по формуле $XF^2 = X'F^2 + X'X^2$, где $F$ — фигура, $X$ — точка, $X'$ — проекция $X$ на плоскость, в которой лежит $F$.)

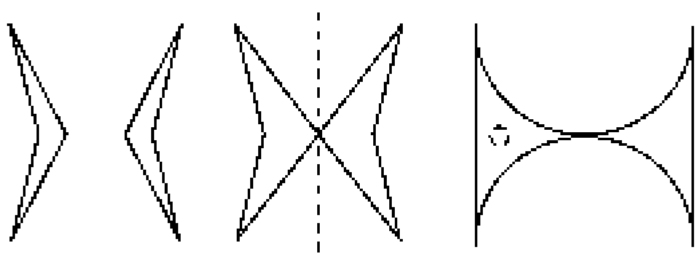
1) Эта точка проектируется в середины гипотенуз всех прямоугольных граней. Она всегда существует и лежит вне тетраэдра.

2) Такая точка существует, только если все рёбра тетраэдра, прилежащие к прямому углу, равны между собой. Тогда она лежит внутри тетраэдра.

**19.15.** Нет. Пусть $F$ — куб с ребром $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Центр грани куба удалён от любой его точки на расстояние не больше чем $\frac{d}{\sqrt{2}} < d$. Возьмём близкие к центру грани точки внутри куба и вне его. Они также удалены от любой точки куба меньше чем на $d$, т. е. точки, о которых говорится в условии задачи, существуют внутри куба, на его границе и снаружи от куба.

**19.16.** а)—в) Да. (По нашему определению сечения точка, через которую проходит опорная плоскость, сечением не является. Иначе ответы были бы отрицательными.) В качестве примеров таких тел можно взять тела вращения, получающиеся из фигур, приведённых на рисунке 124. Небольшая дополнительная проблема есть в пункте «в». У получившегося тела есть одно выпуклое сечение, проходящее через центр и перпендикулярное оси. Чтобы уничтожить его, вырежем внутри тела маленький шарик, через который проходит это сечение (он показан пунктиром на рисунке). На проекции тела это никак не повлияет, а сечение испортится.

г) Нет. Если каждое сечение тела выпукло, то и само тело выпукло, но тогда и все его проекции выпуклы.



а) б) в)

Рис. 124

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ К ГЛАВАМ

## Задачи к главе I

**I.1.** а) Пусть даны точки $K$ и $L$ на гранях тетраэдра (рис. 125). Возьмём точку $M$ на том ребре тетраэдра, по которому пересекаются грани, содержащие $K$ и $L$. Проведём прямые $MK$ и $ML$ до точек пересечения $N$ и $O$ с рёбрами тетраэдра. Прямая $NO$ лежит в плоскости $KLM$ и в плоскости грани тетраэдра. Поэтому точка $P$ пересечения прямых $KL$ и $NO$ искомая.

б) Решите сначала задачу «а» для каждой пары точек.

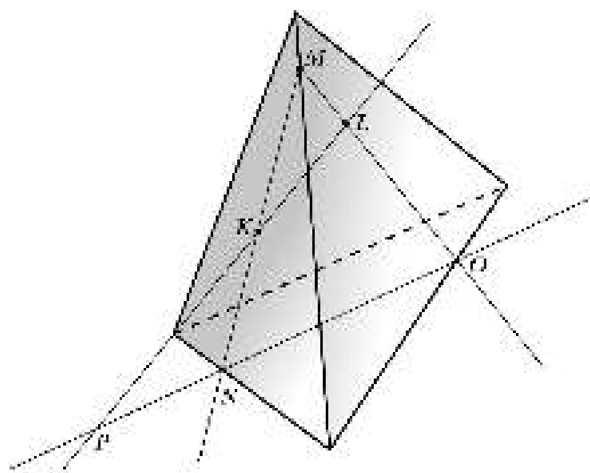



Рис. 125

**I.2.** Нарисуем сначала точку пересечения прямой $KL$ с плоскостью $ABC$ (см. задачу **I.1**) и проведём через неё прямую, параллельную $AB$. Эта прямая лежит в искомой плоскости сечения. Таким образом мы найдём одну из сторон сечения. Осталось провести остальные стороны. Это уже несложно, поскольку у нас есть четыре точки этого сечения ($K$, $L$ и концы найденного отрезка).

**I.3.** Мы уже умеем рисовать сечения плоскостями, проходящими через заданные точки. Нарисуем три сечения: проходящие через $K$, $L$ и $M$; через $K$, $P$ и $N$; через $L$, $P$ и $N$ и линии их пересечения. Искомая точка лежит на пересечении всех трёх плоскостей.

**I.4.** Все эти задачи легко решаются с помощью техники, описанной в решениях задач **I.1** и **I.3**.

**I.5.** а) По-видимому, подразумевается, что ни у каких трёх плоскостей нет общей прямой, а ни у каких четырёх нет общей точки (иначе задача стала бы неинтересной). Возьмём в качестве четырёх плоскостей плоскости граней тетраэдра, а в качестве пятой — плоскость, которая пересекает этот тетраэдр по четырёхугольнику.

б) Нужно просто нарисовать девять плоскостей «в общем положении». Начнём с пяти плоскостей, как описано в пункте «а», и будем проводить каждую новую плоскость так, чтобы выполнялись два условия: 1) новая плоскость пересекает все уже имеющиеся (это условие запрещает конечное число направлений плоскостей); 2) новая плоскость не проходит через точки пересечения троек старых плоскостей (таких «запретных» точек конечное число). Проводить такие плоскости нам всегда удастся — это результат задачи **I.12**. Таким образом можно построить произвольное число плоскостей, каждые две из которых имеют общую прямую, но никакие три не имеют общей прямой (при этом каждые три имеют общую точку, а каждые четыре нет).

**I.6.** Этот отрезок — диагональ в параллелограмме, образованном средними линиями граней, так что нужно измерить длины двух средних линий (достаточно измерить длины соответствующих рёбер) и угол между ними.

**I.7.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. б) 3. в) 3. г) $\sqrt{3}$.

**I.8.** Обозначим через $r$ расстояние между серединами $AB$ и $PC$. Тогда $x = 2\sqrt{\frac{3}{4}d^2 - r^2}$; $r \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}d\right)$; $x \in \left(0, \sqrt{3}d\right)$.

**I.9.** а) 1. б) 3. в) $\sqrt{5}$. г) $\sqrt{14}$.

Указание. Докажите, что наибольшее расстояние в многограннике — какое-то из расстояний между его вершинами.

**I.10.** На рисунке 126 показан ответ для треугольника (он максимален, поскольку более длинные стороны просто не поместятся на гранях). Наибольший квадрат совпадает с гранью куба. Что касается наибольшего круга, то он вписан в сечение куба, являющееся правильным шестиугольником.

Мы приведём набросок доказательства, использующего технику, которая появится лишь существенно позже. Проведём плоскость, в которой лежит круг. Сечение куба этой плоскостью — пересечение трёх полос. Круг должен лежать в каждой из этих полос, так что его диаметр не превосходит ширины самой узкой из них. В то же время ширины полос $d_1$, $d_2$

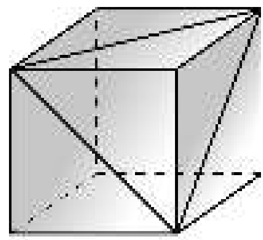


Рис. 126

и $d_3$ связаны соотношением $\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}=\frac{2}{a^2}$, где $a$ — ребро куба (см., например, задачу **13.2**). Чтобы наименьшая из ширин достигла максимально возможного значения, все три ширины должны быть равны. Это и достигается в сечении — правильном шестиугольнике. Более того, диаметр круга равен при этом ширинам.

**I.11.** Точка пересечения первых двух прямых принадлежит всем трём плоскостям, значит, она принадлежит и третьей прямой.

**I.12.** Эта задача очень похожа на те, которые мы решали в § 5, и техника их решения аналогична. Решим для начала задачу «б». Возьмём какую-нибудь прямую и проведём через неё $n + 1$ различных плоскостей. Две такие плоскости не могут одновременно не пересекать одну из данных плоскостей, поэтому хотя бы одна из построенных плоскостей пересекает все данные.

Теперь, повторив то же рассуждение, но заменив плоскости на прямые, лежащие в найденной плоскости, решим задачу «в». Осталось взять подходящую точку на получившейся прямой, и задача «а» тоже решена.

**I.13.** Пусть $M$ — середина ребра $AB$. Рассмотрим треугольник $KLM$. $KL < KM + ML$ по неравенству треугольника. С другой стороны, $KM = \frac{PB}{2}$ как средняя линия в треугольнике $PAB$ и аналогично $LM = \frac{AC}{2}$. Это и даёт искомое неравенство.

**I.14.** а) Возьмите четыре точки в вершинах правильного тетраэдра. Для доказательства его существования можно взять правильный треугольник со стороной 1 на плоскости и восстановить из его центра перпендикуляр длиной $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Конец этого перпендикуляра и три вершины треугольника — вершины тетраэдра. (Стоит заметить, что это решение использует технику, которая появится лишь в следующей главе.)

б) Можно добиться даже девяти равных расстояний. Для этого возьмём два равных правильных тетраэдра и составим их основаниями. Пять вершин этих тетраэдров и будут искомыми точками. Приставив к такой конструкции ещё один тетраэдр, равный двум первым, мы получим шесть точек и двенадцать равных расстояний и т. д. Есть и другая конструкция с шестью точками: нарисуйте треугольную антипризму, все рёбра которой равны между собой.

**I.15.** Такие точки существуют на любой прямой (рис. 127). Разумеется, аналогичный пример есть для любого числа точек, а не только для четырёх.


Рис. 127

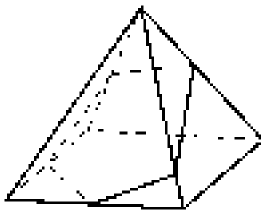


Рис.128

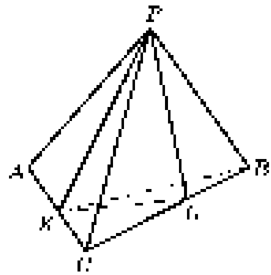


Рис.129

**I.16.** На все вопросы ответ «да».

**I.17.** а) Да, сечение нужно провести близко к вершине основания. Проведите сначала сечение, которое является равнобедренным треугольником, а затем поворачивайте его вокруг основания.

б) Да, достаточно взять сечение, параллельное основанию.

в) Да, возьмите сечение, параллельное стороне основания, но не всему основанию.

г) Да, это показано на рисунке 128.

д) Нет, у пирамиды только пять граней, они не могут дать в сечении шесть сторон.

е) Да, если подобрать соответствующим образом соотношение размеров пирамиды.

**I.18.** Нет. Иначе точка пересечения третьей плоскости и прямой пересечения оказалась бы общей для всех трёх плоскостей. Но тогда она лежала бы и на всех трёх прямых, а это невозможно по условию.

**I.19.** На оба вопроса ответ «нет» (контрпример приведён в задаче **I.5)**. Вот если бы любые четыре плоскости имели общую точку, то ответ был бы положительным. Это один из вариантов теоремы Хелли (см. задачу **17.5**).

**I.20.** Наименьшая сторона лежит напротив вершины тетраэдра. Обозначим тетраэдр $PABC$, сечение $PKL$ (рис. 129). Тогда $KL < KB = PK$, аналогично $KL < LA = PL$.

## Задачи к главе II

**II.1.** а) Это сечение можно разбить на две части: прямоугольник со сторонами $\frac{1}{2}BD$ и $\frac{1}{2}AP$ и треугольник с основанием $\frac{1}{2}BD$ и высотой $\frac{1}{2}AP$. Таким образом, площадь сечения равна $\frac{5}{16}BD \cdot AP = 5\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}$.

б) При разных значениях φ это сечение выглядит существенно по-разному. Если $\sin\frac{\varphi}{2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$, то получается треугольник, а иначе — пятиугольник.

Вычисление их площадей — задача трудоёмкая и достаточно бессмысленная, поэтому, задавая эту задачу (впрочем, и задачу «а» тоже), разумно задать конкретное значение φ.

**II.2.** О т в е т: от $\frac{1}{2}$ (когда $N = A$ и искомый отрезок — $KL$) до $\frac{3}{4}$ (когда $N = A_1$ и искомый отрезок — средняя линия трапеции $KLMO$, где $O$ — середина $CC_1$).

**II.3.** а) От $\frac{1}{2}$ (отрезок ровно посередине между двумя основаниями) до 1 (отрезок лежит на одном из оснований).

б) От $\frac{\sqrt{5}}{5}$ до $\sqrt{2}$ (отрезок лежит на боковой грани). Если $x$ — расстояние от основания до одного из концов отрезка, то длина отрезка равна $\sqrt{(2x-1)^2+(x-1)^2}$.

**II.4.** а) Это сечения, параллельные одной из боковых граней. Наибольшая площадь достигается, разумеется, при совпадении с этой гранью (она равна 1).

б) Если бы призма была очень высокой, то почти все сечения были бы одинаковыми треугольниками. Те сечения, которые отличаются от этих треугольников, имеют меньшую площадь (они получаются из треугольников отрезанием частей).

В нашем случае призма невысокая, но одно сечение, «содержащее всё, что возможно», у неё всё-таки есть: это сечение, проходящее через две вершины той грани, на которой взята диагональ. Его площадь $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

в) Сечение сначала увеличивается в размерах (у треугольника растут одновременно основание и высота), затем некоторое время остаётся неизменным, а затем начинает уменьшаться (сечения становятся трапециями, получаемыми из наибольшего треугольника отрезанием всё большей и большей части). Площадь наибольшего сечения равна $\frac{\sqrt{21}}{8}$.

**II.5.** О т в е т: от 3 до $+\infty$.

У к а з а н и е. Если $x$ и $y$ — расстояния от вершин куба до концов отрезка, как показано на рисунке 130, то $xy = 1$. Длина отрезка равна в таком случае $\sqrt{(1+x)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+1^2}$ и минимальна при $x = 1$.

**II.6.** Можно, разумеется, нарисовать эти сечения, посчитать их размеры и убедиться, что действительно получаются разные фигуры. Но есть более простой способ, хотя и не совсем формальный. Применим

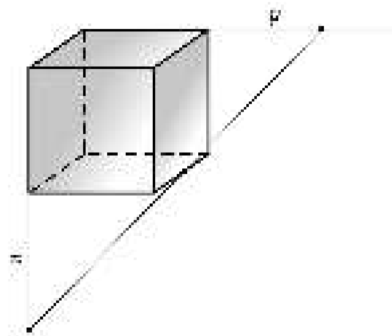


Рис.130

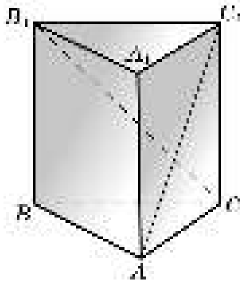



Рис.131

соображения симметрии. Повернём призму так, чтобы её вершины поменялись местами: $A \to C$, $C \to B$, $B \to A$ (рис. 131). Тогда и диагонали, а значит, и сечения поменяются местами. Но раз сечения совпали при наложении, значит, это равные фигуры. Мы выяснили, что фигуры равны, но так и не узнали, как они выглядят!

**II.7.** Исходный треугольник может быть любым (с точностью до подобия). Возьмём произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ и попробуем построить плоскость, чтобы получающийся при оригинальной проекции треугольник был равнобедренным и прямоугольным. Возьмём $A = A_1$. Будем проводить через $A$ всевозможные плоскости, на которые угол $B_1AC_1$ проектируется в прямой.

На рисунке 132 продемонстрировано три варианта таких плоскостей. Из этого рисунка понятно, что можно непрерывно двигать плоскость, при этом если вначале проекция отрезка $AC_1$ была очень короткой (меньше проекции $AB_1$), то к концу проекции поменялись ролями. Значит, в какой-то момент проекции равны, и это именно тот момент, который нам нужен.

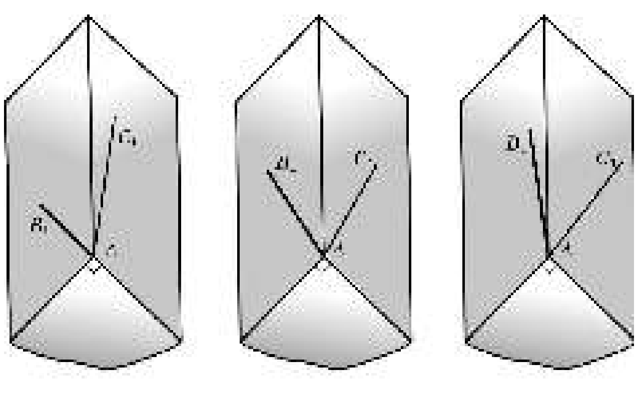


Рис.132

На рисунке угол $B_1AC_1$ — острый, но если он тупой, всё выглядит абсолютно аналогично.

**II.8.** Трудно привести в каком-нибудь смысле полное решение этой задачи, так что мы просто приведём пример двух очень похожих утверждений, одно из которых верно, а другое нет. Полезно привести подобный пример, чтобы показать, что рассуждение по аналогии не всегда верно.

1) Если $a \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, $\beta \perp b$, то $a \perp b$.

2) Но если $a \parallel \alpha$, $\alpha \perp \beta$, $\beta \parallel b$, то совсем необязательно $a \perp b$ (хотя и такое может быть).

**II.9.** Условие эквивалентно тому, что через $PB$ проходит плоскость, перпендикулярная $AC$, иначе говоря, $PB$ и $AC$ перпендикулярны.

а) Плоскость, проходящая через $P$, $B$ и проекцию $P$ на $AC$, перпендикулярна $AC$, а значит, и плоскости $ABC$. В ней лежат и высота пирамиды, и высота основания.

б) Да, условие $PB \perp AC$ симметрично.

**II.10.** О т в е т: $\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$.

**II.11.** Задача достаточно стандартна, так что приведём только вид сечений.

а) Трапеция или равнобедренный треугольник.

б) Прямоугольник (это сечение параллельно $AB$ и $PC$).

в) Треугольник или четырёхугольник.

г) Равнобедренный треугольник, трапеция, квадрат.

д) Треугольник.

**II.12.** Снова ограничимся только указанием вида сечений.

а) Равнобокая трапеция с углом 60°.

б) Всякое сечение, проходящее через $KL$ параллельно $BD$. Это может быть равнобедренный треугольник или пятиугольник с осью симметрии.

в) Равнобедренный треугольник или пятиугольник с осью симметрии.

г) Равнобедренный треугольник (если сечение проходит через $P$) или равнобокая трапеция.

д) Треугольник либо четырёхугольник.

**II.13.** Для правильной (четырёхугольной) пирамиды ответ, очевидно, положителен.

Что касается различных тетраэдров, то сечение тетраэдра может быть параллелограммом, только если оно параллельно двум скрещивающимся рёбрам. (Так как линии пересечения плоскости с двумя гранями должны быть параллельны, они обязаны быть параллельны общему ребру этих двух граней.) Двигая это сечение, мы всегда можем сделать его ромбом, а станет ли оно при этом квадратом, определяется тем, перпендикулярны ли выбранные скрещивающиеся рёбра. Поэтому в пункте «б» ответ «да»: там есть перпендикулярные скрещивающиеся рёбра, а в пункте «в» ответ «нет».

Для куба (пункт «г») ответ «нет», так как сечения, являющиеся ромбами и не параллельные граням, оказываются не квадратами.

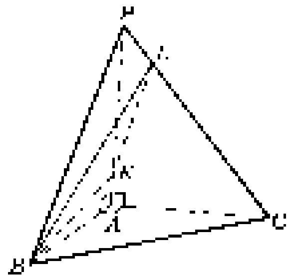


Рис.133

**II.14.** а) Да, в сечении плоскостью, параллельной катету одной из граней.

б) Да, достаточно провести сечение через три точки на рёбрах, прилежащих к трём прямым углам.

в) Да, это показано на рисунке 133.

г) Да, способами трёх предыдущих пунктов можно изготовить сечение в форме любого заданного треугольника. Объяснение довольно длинно, но оно похоже на объяснения аналогичных фактов, приведённых в учебнике.

**II.15.** Введём обозначения: $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$.

а) $AB^2 = a^2 + b^2$, $AC^2 = a^2 + c^2$, $BC^2 = b^2 + c^2$. Поэтому $AB^2 < AC^2 + BC^2$ и угол $BAC$ — острый. То же верно для двух других углов.

б) В точку пересечения высот, так как боковые рёбра проектируются в высоты основания (точнее говоря, в части этих высот).

в) Ответ: $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$. Высота $PH$ грани $PAC$ равна $\dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, искомый отрезок является высотой в прямоугольном треугольнике $PHB$.

г) Площадь проекции грани $PAB$ на основание равна $\dfrac{S^2_{PAB}}{S_{ABC}}$. В этом месте разумно заметить, что при проектировании плоской фигуры её площадь меняется в число раз, зависящее только от плоскостей, на которых лежат проектируемая фигура и проекция, но не зависящее от вида проектируемой фигуры. (На самом деле это число — косинус угла между плоскостями.) После этого замечания воспользуемся тем, что основание при проектировании на плоскость боковой грани даёт в точности эту грань.

д) Складывая площади проекций трёх боковых граней, мы получим площадь основания. Отсюда $S_{ABC} = \sqrt{S^2_{PAB} + S^2_{PAC} + S^2_{PBC}}$.

**II.16.** Описанное тело — правильный октаэдр, а его сечение — правильный шестиугольник. Стороны этого шестиугольника равны $\dfrac{1}{2}$, а площадь соответственно $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. Если сдвинуть плоскость параллельно, то сечение станет шестиугольником, стороны которого чередуются: $a$, $1-a$, $a$, $1-a$, $a$, $1-a$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$. Площадь такого шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}(1+2a-2a^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{2}-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right)$; она минимальна при $a = 1$ или $a = 0$ (в этом случае сечение совпадает с одной из граней октаэдра) и максимальна при $a = \frac{1}{2}$.

О т в е т: площадь меняется от $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ до $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

**II.17.** Все сечения тетраэдра — треугольники или четырёхугольники. С треугольником всё ясно (каждая сторона такого сечения не превосходит ребра, т. е. 1, а всего сторон 3). Что касается четырёхугольников, то будем рассматривать их не по отдельности, а сразу всё семейство параллельных сечений. Подсказка, что так имеет смысл поступить, содержится в условии задачи.

При движении плоскости параллельно самой себе сначала возникает треугольное сечение тетраэдра, затем оно превращается в четырёхугольное и через некоторое время снова в треугольное. Посмотрим на меняющиеся четырёхугольники. Длина каждой из сторон меняется линейно при сдвиге плоскости (это значит, что при сдвиге плоскости на расстояние $d$ длина стороны изменяется на $\alpha d$, где $\alpha$ — некоторая константа). Это значит, что и периметр меняется линейно. Но экстремумы линейной функции достигаются на концах промежутка, а на концах наш четырёхугольник вырождается в треугольник, у которого периметр меньше 3. Значит, и периметр любого четырёхугольного сечения меньше 3.

У этой задачи есть элементарные решения, но все они (по крайней мере все известные нам) более громоздки, чем приведённое. Кроме того, это решение демонстрирует весьма полезную идею.

**II.18.** На рисунке 134 приведены два примера таких ломаных, проходящих по рёбрам тетраэдра и куба.

**II.19.** Обозначим проекцию $AB$ на плоскость через $A_1B_1$, а проекцию того же отрезка на прямую $b$ через $A_2B_2$ (рис. 135). Заметим, что $A_2B_2$ является также проекцией $A_1B_1$ на прямую $b$. Поэтому $A_1B_1 \geqslant A_2B_2$.

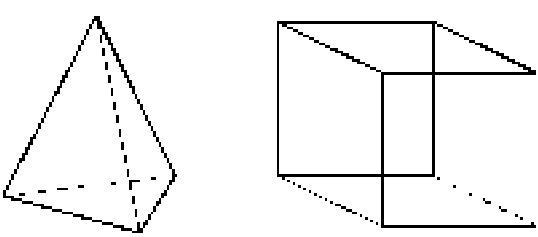


Рис.134

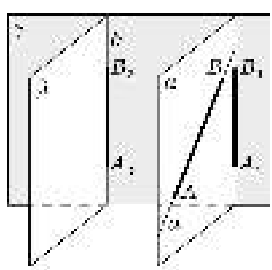


Рис.135

Равенство достигается, если $A_1B_1 \parallel b$. Для того чтобы последнее условие выполнилось, проведём параллельные плоскости α и β, в которых лежат $a$ и $b$, и построим плоскость γ, проходящую через $b$ и перпендикулярную α и β. Проекцией окажется прямая пересечения α и γ, которая параллельна $b$.

Интересно отметить, что ответ не зависит от длины отрезка $AB$.

**II.20.** Нет. В произвольном тетраэдре $ABCD$ возьмём какую-нибудь точку $O$ на грани $ABC$ и спроектируем его вдоль прямой $OD$. Треугольник $ABC$ спроектируется в какой-то треугольник, а точка $O$ (а значит, и точка $D$) — внутрь его. Таким образом, проекция тетраэдра окажется треугольником.

**II.21.** Если $n = 4$, то тело — тетраэдр и у его проекции может быть не больше четырёх сторон. Это наводит на мысль, что у проекции выпуклого $n$-гранника должно быть не больше $n$ сторон. На самом деле их может оказаться $2n - 4$ (но не больше).

На рисунке 136 изображены проекции с максимальным числом сторон для $n = 5, 6, 7$ (соответственно 6-, 8- и 10-угольники).

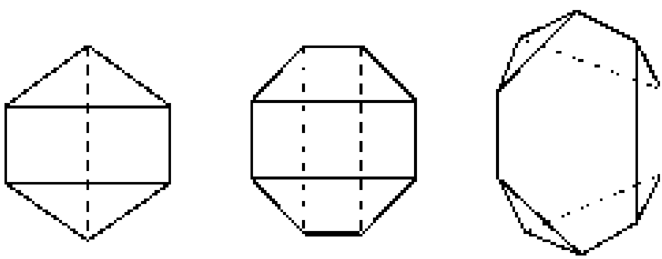


Рис. 136

Докажем, что максимальное число сторон равно $2n - 4$. Пусть при проектировании $n$-гранника получился $k$-угольник. Предположим, что ни одна грань не спроектировалась в отрезок (если это не так, доказательство несколько усложняется, но результат остаётся верным). Тогда из каждой вершины $k$-угольника выходит (внутри $k$-угольника) хотя бы одна проекция ребра (видимого или невидимого). Обозначим число вершин, из которых выходят проекции видимых рёбер, через $l$. Тогда проекции невидимых рёбер выходят по меньшей мере из $k - l$ вершин. Посчитаем теперь число видимых на нашей проекции граней. Их не меньше, чем $\frac{l}{2} + 1$: до проведения «внутренних» проекций рёбер есть ровно одна грань и проведение двух «внутренних» проекций добавляет хотя бы одна грань. Аналогично невидимых граней не меньше, чем $\frac{k-l}{2} + 1$. Общее число граней $n \leqslant \frac{l}{2} + 1 + \frac{k-l}{2} + 1 = \frac{k}{2} + 2$, отсюда уже следует, что $k \geqslant 2n - 4$.

Это доказательство, а также приведённые рисунки позволят построить «экстремальные» картинки для всех $n$.

## Задачи к главе III

К большинству вычислительных задач этой главы есть смысл вернуться ещё раз после того, как школьники освоят технику работы с векторами. Почти все расстояния и углы можно найти, если ввести подходящий набор образующих. В решениях мы не обсуждаем такой подход (хотя часто он оказывается проще).

**III.1.** В общем виде эта задача довольно сложна, а получающиеся результаты весьма громоздки. Дополнительные обобщения, которые предлагаются в условии (круги брать неравными, а угол между плоскостями — произвольным), задачу, разумеется, не упрощают. Разумно ввести какие-нибудь дополнительные, упрощающие задачу условия, обсудить общий путь решения, а затем предложить конкретные (и совсем простые, например симметричные, числовые данные).

Мы обсудим только случай перпендикулярных плоскостей. Прежде всего разумно рассмотреть два варианта: 1) круги пересекают общую прямую плоскостей; 2) круги не пересекают эту прямую. В первом случае ближайшие точки могут быть расположены внутри кругов, а во втором нет. Поэтому разумно сразу ограничиться более общим и в то же время более простым вторым случаем.

Поскольку ближайшие точки кругов лежат на их окружностях, можно поступить следующим образом. Выберем какие-нибудь точки на этих окружностях (например, ближайшие к общей прямой двух плоскостей) и будем задавать точки на окружностях углами, на которые они отстоят от выбранных точек. Пусть угол на первой окружности равен $\alpha$, на второй — $\beta$. Найдём для каждой точки $\alpha$ ближайшую к ней на второй окружности точку $\beta$, таким образом мы найдём функцию $\beta(\alpha)$.

Последним действием запишем функцию расстояния между $\alpha$ и $\beta(\alpha)$ и исследуем её на минимум с помощью производной.

**III.2.** Пункт «а» задачи решается довольно просто, искомое расстояние — расстояние от $A$ до высоты треугольника $KBC$. Для решения остальных пунктов полезно дополнительное построение. Достроим нашу конструкцию до правильной шестиугольной пирамиды, как показано на рисунке 137. После этого решение задачи сильно упрощается. Мы приведём только некоторые равенства без пояснений.

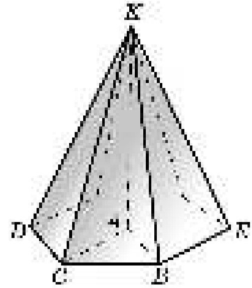


Рис 137

а) $d(BK, AC) = d(BEK, AC) = d(BEK, A) = d(BKC, A)$.

в) $\angle(KC, AB) = \angle(KC, CD) = \angle(KC, CB)$.

г) $\angle(BK, AKC) = 90° - \angle(BK, BD)$.

д) Можно воспользоваться, например, теоремой синусов для трёхгранного угла $BAKC$.

О т в е т: а) $\frac{\sqrt{21}}{7}$. в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. г) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$. д) $\arccos\frac{\sqrt{7}}{7}$.

**III.3.** а) Расстояние считается до треугольника, а не до плоскости, поэтому оно равно $x$, если $x < 2\cos\varphi$, а иначе — длине высоты в треугольнике со сторонами $x$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{x^2+3-4x\cos\varphi}$ (из вершины между двумя первыми сторонами); расстояние до плоскости всегда равно второй величине.

**III.4.** а) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. б) $\frac{x^2}{\sqrt{20+x^2}}$. в) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+5}}$. г) $\frac{8x}{\sqrt{x^4+80x^2+64}}$.

д)—ж) Все эти углы можно найти из рассмотрения подходящих прямоугольных трёхгранных углов.

**III.5.** В этой конструкции можно найти все расстояния и углы в общем виде, но ответы малоинтересны. Поэтому мы только укажем, какие отрезки и углы нужно искать. Разумно предложить ученикам конкретные числовые данные.

а) Это расстояние равно расстоянию от $AB$ до $KCD$. Если спроектировать всё на плоскость, перпендикулярную $AB$, то искомое расстояние — высота из вершины $A'$ прямоугольного треугольника $A'K'C'$.

в) Эти две прямые вместе с $BK$ образуют прямоугольный трёхгранный угол, «катеты» которого известны, искомый угол — «гипотенуза» — находится по теореме Пифагора.

д) Нужно искать угол между высотами указанных треугольников, опущенных на сторону $KD$.

**III.6.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (до треугольника, не до плоскости!). б) $AA_1 = 1$. в) $\arccos\frac{2}{5}$. г) $\arccos\frac{\sqrt{105}}{21}$. д) 60°.

**III.7.** Опишем, как можно построить указанные сечения. Нарисуем окружность в плоскости основания тетраэдра с центром в середине основания и радиусом, равным половине высоты. Пересечение плоскости сечения с плоскостью основания — прямая, касающаяся этой окружности. Нужно только выбрать прямую:

а) параллельно стороне основания;

б) которая находится на равном удалении от центра и вершины основания.

В пункте «в» сразу легко нарисовать одну точку сечения — основание перпендикуляра, опущенного на боковую грань. Проведя прямую через неё и середину высоты, получим точку на основании (в действительности эта точка лежит на продолжении медианы основания и удалена от вершины на длину этой медианы). Искомая прямая проходит через эту точку и касается построенной раньше окружности.

**III.8.** В общем виде задачи весьма сложны (в смысле количества вычислений), поэтому есть смысл задавать конкретные значения φ. Мы укажем возможную форму сечений в двух (более простых) пунктах. Как видно из их описания, даже в этих простых случаях возможны разные варианты сечений.

а) Такое сечение — трапеция, но нужно иметь в виду, что в зависимости от φ одно из оснований трапеции получается при пересечении с боковой гранью или с основанием.

в) В зависимости от φ это либо четырёхугольник, составленный из двух равнобедренных треугольников, либо пятиугольник, составленный из равнобедренного треугольника и равнобокой трапеции.

И ещё одно замечание по поводу пунктов «б» и «г». При неудачном выборе φ такие сечения могут просто не существовать.

**III.9.** а) Проведём плоскость $ABC$ и будем поворачивать её, следя, чтобы она оставалась такой, как в условии. Сечение всё время остаётся равнобедренным треугольником. Сначала (от $ABC$ до $A_1BC_1$) его основание остаётся неизменным, а высота возрастает, поэтому периметр и площадь возрастают. На втором этапе (от $A_1BC_1$ до $BB_1$) и основание, и высота (а значит, и периметр, и площадь) уменьшаются. Поэтому наибольшие значения достигаются для сечения $A_1BC_1$, а наименьшие — для $ABC$ или $BB_1$ (в действительности для $BB_1$).

б) Ситуация аналогична, но в этот раз такими простыми рассуждениями не обойтись. Начнём с плоскости $ABC$ и будем поворачивать её вокруг $AC$. Сначала (до $AB_1C$) это равнобедренный треугольник, площадь и периметр которого возрастают. Далее (до $ACC_1A_1$) сечение представляет собой трапецию. Большее основание этой трапеции $AC = 1$. Обозначим меньшее основание через $x$. Тогда боковая сторона трапеции равна

$$\sqrt{1+(1-x)^2} = \sqrt{x^2-2x+2},$$

а высота

$$\sqrt{1+\frac{3}{4}(1-x)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3x^2-6x+7}.$$

Теперь можно записать выражения для периметра и площади и искать их минимумы и максимумы обычными аналитическими средствами. Если посчитать производные, то нетрудно убедиться, что функция площади не имеет экстремумов на отрезке $x \in [0; 1]$, а функция периметра имеет один минимум в точке $x = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Однако значение периметра в этой точке ($2+\sqrt{3}$) всё-таки больше периметра $ABC$ (3).

О т в е т: а) Площадь — от 0 до $\frac{\sqrt{7}}{4}$, периметр — от 2 до $1 + 2\sqrt{2}$.

б) Площадь — от $\frac{\sqrt{3}}{4}$ до 1, периметр — от 3 до 4.

**III.10.** Если мы будем поворачивать сечение, начиная с $ABCD$ и до того момента, когда оно содержит отрезок $DD_1$, то у нас будут получаться сначала ромбы (до момента, когда сечение пройдёт через $B_1$), затем пятиугольники (до $A_1DC_1$) и, наконец, треугольники. При этом, пока сечение является ромбом, его периметр и площадь возрастают, а когда оно является треугольником — убывают. Поэтому сложность представляют только сечения-пятиугольники.

Если обозначить через $x$ расстояние от $B_1$ до пересечения прямой $BB_1$ с плоскостью сечения, то площадь искомого пятиугольника и его периметр равны соответственно

$$\sqrt{\frac{x^2+2x+3}{4}}\left(1-\frac{2x^2}{(x+1)^2}\right) \quad \text{и} \quad \frac{4\sqrt{1+x^2}+2\sqrt{2}x}{x+1}.$$

**III.11.** Треугольники $LA_1K$ и $KA_2L$ прямоугольные (прямые углы в них $K$ и $L$ соответственно). Катет $KL$ в них общий по условию. Поэтому оба утверждения задачи равносильны утверждению о том, что эти треугольники равны.

**III.12.** Прежде всего уточним условие. Слова «дан переменный луч $x$» означают, что задано множество лучей $x(t)$, где $t$ пробегает множество всех положительных чисел. При этом луч $a$ называется предельным для $x$, если для сколь угодно малого угла для всех $t$, больших некоторого фиксированного значения, лучи $x(t)$ составляют с лучом $a$ угол меньше заданного.

При таком определении предельного луча доказательство совсем несложно. Пусть есть два различных предельных луча $a$ и $b$, угол между ними назовём $\alpha$. Для достаточно больших $t$ углы между $x(t)$ и $a$ и между $x(t)$ и $b$ оказываются меньше $\frac{\alpha}{2}$. Получается, что у нас есть три луча, причём один из углов между ними больше суммы двух других, что невозможно по неравенству треугольника для трёхгранных углов (см. задачу **14.53**).

**III.13.** Определение предельного луча уточнено в решении предыдущей задачи. Кроме того, все решения аналогичны решению предыдущей задачи.

а) Если это не так и предельный луч $a$ образует с данным лучом $b$ угол $\psi \neq \varphi$, то выберем такой луч $x$ (из множества $x(t)$), что его угол с $a$ меньше $|\varphi - \psi|$. Тогда лучи $a$, $b$ и $x$ образуют трёхгранный угол, в котором нарушается неравенство треугольника для трёхгранных углов.

б) Решение полностью аналогично решению пункта «а», только вместо утверждения задачи **14.53** нужно использовать следующий факт:

если даны два луча и плоскость, то величины трёх углов между ними удовлетворяют неравенству треугольника.

в) Пусть $a$ — предельный луч, $b$ и $c$ — данные лучи. Если углы $\angle ab$ и $\angle ac$ различны, положим для определённости, что $\angle ab > \angle ac$, и выберем луч $x$ (из множества $x(t)$), такой, что $\angle ax < \angle ab - \angle ac$. По неравенству треугольника для трёхгранных углов $abx$ и $acx$ получаем, что $\angle ab < \angle ax + \angle bx$ и $\angle cx < \angle ac + \angle ax$. Складывая эти неравенства и учитывая, что $\angle bx = \angle cx$, мы находим, что $\angle ab < \angle ac + 2\angle ax$, что противоречит выбору $x$.

г) Необязательно. Проекция предельного луча вообще может оказаться точкой.

**III.14.** а) Разумеется, некоторая связь есть. Например, длина проекции на ребро не может быть больше длин проекций на грани. Но это, по сути дела, и всё. Никакой однозначной зависимости не существует. Чтобы продемонстрировать это, проведём плоскость, параллельную биссекторной плоскости смежного двугранного угла (иначе говоря, плоскость, параллельную ребру и образующую равные углы с гранями), возьмём в ней отрезок и будем его поворачивать. Длины проекций на грани всё время будут равны между собой, и, меняя длину отрезка, мы можем добиться, чтобы эти длины вообще не менялись. При этом длина проекции на ребро меняется от 0 (когда отрезок перпендикулярен ребру) до длины отрезка (когда он параллелен ребру).

б) Да. Если известны длина отрезка $l$ и расстояние $d_1$, $d_2$ от его концов до плоскости, то это определяет угол $\alpha$ между отрезком и плоскостью $\left(\sin\alpha = \dfrac{|d_1 - d_2|}{l}\right)$.

в) В принципе ответ на этот вопрос положителен. Если провести через конец отрезка плоскость, перпендикулярную ребру угла, то данные задачи определяют положение конца отрезка в этой плоскости. Длина отрезка определяет и расстояние между плоскостями, так что вся конструкция однозначно определена. Однако вряд ли имеет какой-нибудь смысл искать формулу для ответа в общей ситуации (она, скорее всего, весьма сложна). Можно предложить ученикам найти ответ в случае $\varphi = 90°$, тогда всё сводится к применению теоремы Пифагора.

г) А вот в этой задаче можно и даже полезно написать ответ. Если расстояния от концов отрезка до плоскости равны $d_1$ и $d_2$ и точка делит его в отношении $\alpha : \beta$, то расстояние от этой точки до плоскости равно $\dfrac{\alpha d_1 + \beta d_2}{\alpha + \beta}$. Это легко доказать, применив теорему Фалеса (или просто из соображений подобия).

**III.15.** Найти углы прямой $BC$ с плоскостями $\alpha$ и $\beta$ неожиданно совсем просто. $\angle((BC), \beta) = \varphi_1$, $\angle((BC), \alpha) = \varphi_2$. Действительно, $A$ и $B$ лежат на $\alpha$, $AC = BC$, поэтому $AC$ и $BC$ образуют с $\alpha$ равные углы. (Мы просто забываем на время про плоскость $\beta$!)

Угол с общей прямой искать чуть сложнее, но это уже совсем техническая задача (см., например, задачу **14.44**).

**III.16.** Если заменить в этой задаче плоскости на перпендикуляры к ним, то у нас получатся четыре прямые, причём пять из шести углов между ними известны. Как найти шестой, рассказано в следующей задаче.

**III.17.** Рассмотрим четыре трёхгранных угла, которые образуют эти лучи. Два из них полностью заданы (так как заданы все их плоские углы). Но это значит, что мы знаем и их двугранные углы. Посмотрим теперь на трёхгранный угол, который известен нам не полностью. В нём мы знаем два плоских угла и можем найти двугранный угол между ними (так как знаем два других двугранных угла, которые дополняют его до полного). Но этих сведений достаточно, чтобы найти и остальные элементы трёхгранного угла.

**III.18.** Да, ответ найти можно, но вряд ли он представляет интерес в общем виде. Если нарисовать обе плоскости и отрезок, соединяющий точки падения луча на эти плоскости, то, поскольку все углы заданы, эта картинка будет определена с точностью до подобия. Это значит, что (поскольку падающий и отражённый лучи на такой картинке восстанавливаются однозначно) ответ единствен. Его можно вычислить, применяя несколько раз теорему косинусов.

Гораздо более содержательным представляется вопрос о том, любые ли исходные данные корректны. В действительности описанная выше картинка приводит к ограничению $\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 < 180°$.

**III.19.** а) Прежде всего будем считать, что известно ребро тетраэдра, иначе данных, разумеется, недостаточно. (Даже если все данные расстояния равны 0, то ничего интересного про последнее сказать не удастся.) Это довольно-таки сложная задача, однако она оказывается легкоразрешимой, если сделать одно наблюдение: сумма квадратов длин проекций рёбер тетраэдра на какую-нибудь прямую не зависит от выбора прямой. Доказать это можно, например, с помощью введения системы координат.

б) Пусть ребро тетраэдра равно 1. Тогда задание угла между ребром и плоскостью $\alpha$ равносильно заданию разности расстояний до $\alpha$ от двух вершин. Понятно, что достаточно задать три таких расстояния, т. е. три угла (не любые, конечно, — все рёбра не должны лежать на одной грани). Далее определяют все остальные углы.

в)Достаточно двух углов. Если мы заменим грани и плоскость $\alpha$ на перпендикуляры к ним и будем рассматривать углы между этими прямыми, то окажемся в ситуации задачи **III.17**.

**III.20.** 1) а) $p$, $q$, $r$ — синусы углов между $OD$ и тремя попарно перпендикулярными прямыми (а такую задачу мы уже решали — см. задачи **13.2**, **14.40**).

б) Квадраты длин сторон этого четырёхугольника можно записать так: $AB^2 = OA^2 + OB^2$, $AC^2 = OA^2 + OC^2$, $CB^2 = OC^2 + OB^2$, поэтому сумма квадратов любых двух сторон больше квадрата третьей стороны. Но это значит, что треугольник $ABC$ — остроугольный.

в) Прямая $AO$ перпендикулярна $BC$, поэтому и её проекция на $ABC$ перпендикулярна $BC$. Отрезок $AD$ — часть этой проекции.

2) В этом случае все углы равны между собой и равны 120°.

3) $p^2 + q^2 + r^2 = 9q^2 = 2$, $q = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $p = r = 2\frac{\sqrt{2}}{3}$. Обозначим $OD$ через $d$. Выясним, что $\sin AOD = \sin COD = p$. Найдём все стороны треугольника $ADC$: $AD = CD = 2d\sqrt{2}$, $OA = OC = 3d$, $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 3d\sqrt{2}$. Теперь нетрудно видеть, что $\angle ADC = 2\arcsin\frac{3}{4}$. Два других угла равны между собой и дополняют угол $CDA$ до 360°.

## Задачи к главе IV

**IV.1.** Ответ на оба вопроса «да». Понятно, что достаточно объяснить, как расположить в соответствии с условием задачи шесть цилиндров.

Возьмём три цилиндра и положим их, как показано на рисунке 138 (не все точки касания находятся внутри образующих). Теперь возьмём две такие конструкции в параллельных плоскостях, повёрнутые друг относительно друга на некоторый (скажем, прямой) угол, и положим одну на другую.

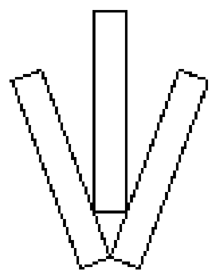


Рис.138

**IV.2.** Нужно провести осевое сечение, тогда задача сводится к нахождению расстояний от центра окружности до сторон, вписанных в него: а) прямоугольника; б) равнобедренного треугольника; в) трапеции. При этом стороны плоских фигур известны.

Тонкость состоит в том, что равнобедренный треугольник и трапеция могут по-разному располагаться в круге (центр может быть внутри или снаружи фигуры).

**IV.3.** Обозначим радиус данных шаров через $r$.

а) Центр такого шара совпадает с центром правильного тетраэдра, образованного центрами данных шаров. Ребро этого тетраэдра равно $2r$, а расстояние от вершины до центра $\frac{\sqrt{6}}{2}r$. Искомый радиус больше этого расстояния на $r$, т. е. равен $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right)r$.

б) Ось цилиндра проходит через центры описанного шара и одного из данных шаров. Но тогда она проходит и через центр равностороннего треугольника, образованного центрами трёх других данных шаров. Длина стороны этого треугольника $2r$, а расстояние от центра до вершины $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$. Радиус цилиндра больше этого расстояния на $r$. Он равен $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)r$. Высота цилиндра складывается из «расстояния по высоте» между центрами шаров и двух радиусов шаров, т. е. равна $\left(\sqrt{\frac{8}{3}}+2\right)r$.

в) Ось конуса совпадает с осью цилиндра из предыдущего пункта. Для нахождения значений полезно нарисовать сечение, проходящее через ось конуса и центр одного из данных шаров.

Ответ: радиус конуса равен $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)r$, его высота $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}+\sqrt{3}\right)r$.

**IV.4.** Эта задача чрезвычайно похожа на задачу IV.10. Центры шаров образуют правильный $n$-угольник со стороной $2r$, где $r$ — радиус меньшего шара. Расстояние от вершины до центра этого $n$-угольника равно, с одной стороны, $r\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, а с другой — $R-r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, где $R$ — радиус основания конуса, а $\alpha$ — угол между образующей конуса и его основанием. Приравняв эти выражения, можно найти $n$.

Полезно отметить ещё два факта:

1. Радиусы малых шаров полностью определяются размерами конуса и большого шара, так что указанные данные даже немного избыточны.

2. Такая конструкция возможна только при специально подобранных исходных данных, поскольку в общем случае значение $n$ окажется не целым.

**IV.5.** По-видимому, нет особого смысла доводить эту задачу (и другие подобные ей) до ответа в виде точной формулы. Это возможно (и даже не слишком трудно), но на примере таких задач можно продемонстрировать, что иногда подобная формула не нужна. Достаточно указать чёткий путь решения, а затем предложить решить задачу с конкретными числовыми данными.

Итак, приведём только путь решения. Рассмотрим несколько лучей с началами в вершине конуса: $a$ — ось конуса, $b_1$, $b_2$ — лучи, по которым грани угла касаются конуса, $c$ — та половина ребра угла, которая образует острый угол с $a$. Поглядим на два трёхгранных угла: $ab_1c$ и $b_1b_2c$. В первом из них двугранный угол $b$ — прямой угол, угол $c = \frac{\varphi_1}{2}$, а плоский угол $ab_1 = \frac{\varphi}{2}$. Это даёт возможность найти все остальные элементы этого угла, и в частности плоский угол $b_1c$. Теперь обратимся ко второму углу. В нём мы знаем двугранный угол $c = \varphi_1$ и плоские углы $b_1c = b_2c$. По теореме косинусов можно найти третий плоский угол $b_1b_2$, что и требовалось.

Полезно заметить, что последнее действие можно несколько упростить, поскольку трёхгранный угол $b_1b_2c$ — равнобедренный. Как и в случае поиска основания равнобедренного треугольника, имеет смысл разбить этот трёхгранный угол на два равных прямоугольных трёхгранных угла и воспользоваться теоремой Пифагора.

**IV.6.** Если ввести и обозначения, как на рисунке 139 ($L$ — точка положения источника света, $L'$ — проекция этой точки на плоскость), то $BX = 1$, $\angle AXB = 60°$.

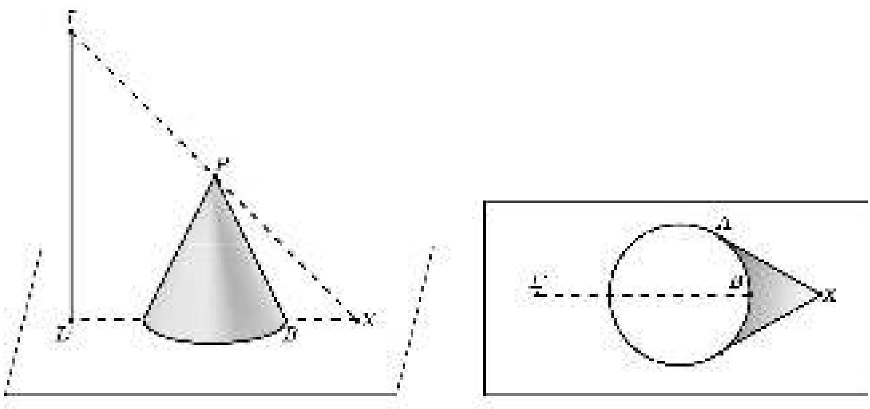


Рис. 139

Увеличив высоту положения источника над плоскостью до 6, мы полностью избавимся от тени (в этом случае точки $B$ и $X$ совпадут). Напротив, уменьшив эту высоту до 2, мы получим бесконечную тень. Разумеется, это значит, что, двигая источник света, мы можем получить тень любой заданной площади (площадь тени непрерывно зависит от высоты).

О т в е т: $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

**IV.7.** Решим задачу в общем случае. Обозначим центры шаров $A_1$, $B_1$, $C_1$ и нарисуем треугольник $A_1B_1C_1$. Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на сторонах этого треугольника, при этом $A_1B = A_1C$, $B_1A = B_1C$, $C_1A = C_1B$. Но это означает, что если вписать в этот треугольник окружность, то она будет касаться его сторон как раз в точках $A$, $B$ и $C$. Теперь понятно, что наибольший радиус шара (т. е. наибольшая длина двух отрезков, касательных к окружности) соответствует наименьшей длине хорды.

В обеих задачах наибольший шар — тот, который содержит точки $A$ и $B$.

На самом деле в этом решении содержится некоторый обман: где гарантия, что описанная в задаче ситуация вообще возможна? В решении почти предложен путь построения такой конструкции — нужно построить треугольник, для которого расстояния между точками касания вписанной окружности равны заданным числам, но это, вообще говоря, отдельная задача.

**IV.8.** Расстояние между центрами любых двух шаров равно $2R$ (так как они касаются). Расстояние между проекциями центров верхнего и любого из нижних шаров $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$. По теореме Пифагора расстояние по высоте между центрами таких шаров равно $\frac{2\sqrt{6}R}{3}$. О т в е т: $\left(2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)R$.

**IV.9.** Посчитаем расстояние между центрами шаров разных размеров. С одной стороны, оно равно $R + r$ (эти шары касаются). С другой стороны, можно провести три попарно перпендикулярные прямые: прямую, соединяющую центры больших шаров; прямую, соединяющую центры маленьких шаров; прямую, перпендикулярную плоскости, на которой лежат все шары. Длины проекций отрезка, соединяющего центры шаров разных размеров, равны соответственно $R$, $r$ и $R - r$. Применив теорему Пифагора, получим уравнение $(R + r)^2 = R^2 + r^2 + (R - r)^2$.

Пусть $R : r = \alpha$. Тогда $(\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 1 + (\alpha - 1)^2$, $\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$. Решив это уравнение и учитывая, что $\alpha > 1$ (так как $R > r$), получаем окончательный о т в е т: $\alpha = 2 + \sqrt{3}$.

Интересно заметить, что второй корень этого уравнения ($2 - \sqrt{3}$) обратный к первому, он просто соответствует случаю $R < r$, так как в нашем уравнении $R$ и $r$ равноправны.

О т в е т: $2 + \sqrt{3}$.

**IV.10.** Слово «вписаны» предполагает, по-видимому, что шары касаются полусферы. При таком понимании описанная ситуация возможна только при некоторых конкретных значениях $r$. Заметим, что центры шаров образуют правильный $n$-угольник со стороной $2r$. Расстояние от центра до вершины такого $n$-угольника равно $l = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, расстояние от центра полушара до центра шара $\sqrt{l^2 + r^2}$, а от центра полушара до точки касания шара и полусферы $R = r + \sqrt{l^2 + r^2}$. Из этого последнего соотношения можно найти зависимость $n$ от $r$:

$$l^2+r^2=(R-r)^2, \qquad l^2=R^2-2Rr, \qquad r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}=R^2-2Rr,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{R^2-2Rr}}{r}, \text{ откуда } n=\frac{\pi}{\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{R^2-2Rr}}{r}}.$$

**IV.11.** а) Да. Их даже можно расположить так, чтобы центры всех трёх шаров лежали на одном диаметре большого шара.

б) Нет. Заметим, что любой шар радиуса 1, находящийся внутри шара радиуса 2, содержит (внутри или на границе) центр последнего. Но через одну точку (центр большого шара) нельзя провести три непересекающихся маленьких шара.

в) Да. На самом деле внутрь шара радиуса 3 можно поместить 13 (!) шаров радиуса 1. Прежде всего разместим один шар радиуса 1 внутрь шара радиуса 3 так, чтобы их центры совпадали. После этого останется свободным слой ширины 2 между двумя сферами. Любой шар радиуса 1, касающийся центрального шара, в точности помещается в этот слой. Поэтому проблема состоит в том, сколько шаров радиуса 1 мы сможем расположить так, чтобы все они (не пересекаясь) касались ещё одного шара того же радиуса. Расположить так три шара, чтобы решить задачу, совсем несложно.

Максимальное число таких шаров равно 12. Не очень трудно представить себе, как это сделать: расположим шесть шаров вокруг центрального так, чтобы центры всех семи оказались в одной плоскости (они лежат в вершинах и центре правильного шестиугольника, рис. 140). В три из шести образовавшихся сверху «лунок» положим три шара. Ещё три шара располагаются аналогично снизу. Вопрос о том, почему нельзя расположить аналогичным образом 13 шаров, довольно сложен: это задача, которой занимался ещё Ньютон и которая была окончательно решена только в 1953 г.

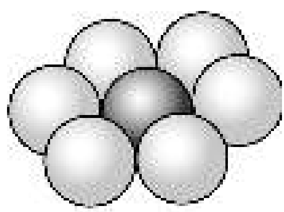


Рис. 140

**IV.12.** Чтобы решить эту задачу, нужно нарисовать проекцию всей конструкции вдоль прямой, которая образует равные углы с осями всех цилиндров. Картинка оказывается неожиданно простой: три полосы одинаковой ширины (равной диаметрам цилиндров) пересекаются под углами в 60°. Между ними образуется равносторонний треугольник, в который и должен пройти шар. Осталось найти размеры этого треугольника.

Возьмём шесть точек на осях цилиндров, которые расположены напротив точек касания этих цилиндров. При проектировании эти точки перейдут в вершины правильного шестиугольника со стороной $2R\cos\alpha$, где $\alpha$ — угол между осью цилиндра и плоскостью проекции. Используя тот факт, что оси цилиндров перпендикулярны, и технику решения задач § 13 (см., например, задачу **13.2**), найдём, что $3\cos^2\alpha = 1$, т. е. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Осталась чисто планиметрическая задача.

О т в е т: $r = \dfrac{2-\sqrt{3}}{3}R$.

**IV.13.** а) Проведём плоскость α через ось конуса и центр шара. Плоскость α перпендикулярна плоскости основания, так что точка касания шара и плоскости основания лежит в α. Докажем, что в ней лежит и точка $A$ касания шара и конуса. Допустим, что это не так, $A \notin \alpha$. Возьмём точку $A'$, симметричную $A$ относительно α. Точка $A'$ лежит и на шаре, и на конусе, поскольку они оба симметричны относительно α. Получается, что у шара и конуса две общие точки — $A$ и $A'$, что противоречит условию.

б) Пусть $r$ — радиус шара, φ — угол при вершине конуса. Нарисуем сечение конструкции плоскостью α и обозначим точки, как на рисунке 141. Тогда $\angle ACB = 90° + \angle APO$ и искомое расстояние равно

$$r(1 + \cos APO).$$

О т в е т: $r\left(1+\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

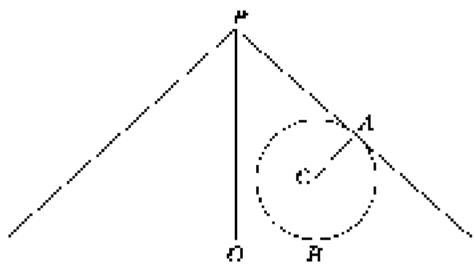



Рис.141

**IV.14.** Многое зависит от того, как понимать условие задачи. Что значит «разместить шары в кульке»? При наиболее простом способе понимания — шары должны находиться целиком внутри конуса — ответ оказывается тривиальным: помещается только один шар. По-видимому, попытки формализовать другие понимания этой фразы приводят к существенно более интересным и сложным задачам. Но на самом деле даже наиболее простой вариант содержит в себе сложности. А что будет, если радиус шара не 1, а, скажем, $\dfrac{1}{100}$? Эта задача весьма сложна. Она, по всей видимости, не имеет точного решения (в том смысле, что найти ответ, скорее всего, не удастся не только нам, но и никому другому). Но можно оценить число маленьких шаров, умещающихся в кульке. Для этого нужно только посчитать объём кулька и учесть, что шары при наиболее плотной упаковке занимают около 77% всего объёма.

**IV.15.** Пусть $R$ — радиус основания, $h$ — его высота, $r$ — радиус шаров, $n$ — число шаров. Тогда

$$r = \sqrt{\left(\frac{hR}{\sqrt{h^2 + R^2}} + r\right)^2 - r^2 \sin\frac{\pi}{n}}.$$

**IV.16.** Удобнее решать пункты этой задачи немного в другом порядке.

в) 90°, вся конструкция симметрична относительно этой плоскости.

а) $\frac{\varphi}{2}$, эта прямая лежит в плоскости, проходящей через оси конусов, и в плоскости из пункта «в».

б) $90° - \frac{\varphi}{2}$, эта прямая лежит в плоскости из пункта «в» и перпендикулярна прямой из пункта «а».

г) $\varphi$, плоскость, проходящая через оси конусов, является биссектором для данной плоскости и $\alpha$.

**IV.17.** а) Диаметр цилиндра равен $2\sqrt{2}$. Если диаметр нашего тела больше, то один его конец ($A$) лежит в цилиндре, а другой ($B$) — в полушаре. Пусть $O$ — центр основания полушара, тогда $AB \leqslant AO + OB \leqslant \sqrt{5} + 1$. В то же время это значение достигается, когда $A$ лежит на границе другого основания цилиндра и $AB$ проходит через $O$.

О т в е т: $1 + \sqrt{5}$.

б) С одной стороны, ширина цилиндра равна 2, ширина нашего тела не меньше. С другой стороны, если провести две опорные плоскости через образующие цилиндра, расстояние как раз будет равно 2.

в) Радиус не может быть меньше, потому что в этот шар должен поместиться треугольник со сторонами 2, $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$. (Это треугольник с вершиной в «вершине» полушара, а две другие его вершины — диаметрально противоположные точки основания цилиндра.) С другой стороны, шар именно такого радиуса проходит через окружность основания цилиндра и касается полушара в его «вершине». О т в е т: $\frac{5}{3}$.

г) Всё полученное тело находится внутри бесконечного цилиндра радиуса 1. О т в е т: 1.

**IV.18.** Осевое сечение — прямоугольник, вписанный в круг радиуса $R$. Его площадь максимальна, когда он является квадратом.

О т в е т: радиус должен быть $\frac{R}{\sqrt{2}}$, высота $R\sqrt{2}$.

**IV.19.** Обозначим радиус основания цилиндра $R$, высоту — $h$, радиус искомого шара — $r$.

1) Наибольший шар, содержащийся в таком цилиндре. Проведём сечение через ось цилиндра и центр шара. Получится прямоугольник со сторонами $2R$ и $h$ и круг радиуса $r$ внутри его. Поэтому $r \leqslant R$ и $r \leqslant \frac{h}{2}$. С другой стороны, ясно, что шар радиуса $r = \min\left\{R, \frac{h}{2}\right\}$ помещается внутри цилиндра. Если искать шар наибольшего радиуса по всем цилиндрам, то получится, что $r$ максимален при $2R = h$ (т. е. когда осевое сечение — квадрат). Но $(2R)^2 + h^2 = 1$.

2) Наименьший шар, содержащий цилиндр. С одной стороны, его диаметр не меньше диаметра цилиндра, т. е. $r \geqslant \frac{1}{2}$. С другой стороны, если мы возьмём шар радиуса $\frac{1}{2}$ и с центром в центре цилиндра, то он будет содержать весь цилиндр.

О т в е т: 1) $r_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 2) $r_{\min} = \frac{1}{2}$.

**IV.20.** Проведём сечение через центры шаров перпендикулярно основанию цилиндра. Получится прямоугольник высотой $d$ и шириной не больше $d$, в котором расположены два равных круга. Наибольший их радиус достигается, если прямоугольник — квадрат, и тогда этот радиус равен $\frac{d}{2 + 2\sqrt{2}}$. Ясно, что, таким образом, шары на самом деле можно расположить в цилиндре.

**IV.21.** Для цилиндра, лежащего на основании, о т в е т: $\sqrt{\frac{R^2}{4} + H^2}$, для лежащего на образующей о т в е т: $\sqrt{R^2 + \frac{H^2}{4}}$.

**IV.22.** Каждый из конусов симметричен относительно плоскости, проходящей через оси конусов. Значит, относительно этой плоскости симметрична и вся конструкция, и в частности плоскость, проходящая через две общие образующие.

**IV.23.** Во всех пунктах задачи рассуждение абсолютно одинаково. Если рассмотреть сечение этой конструкции плоскостями, перпендикулярными оси, то в каждом сечении получатся две концентрические окружности. Они либо не пересекаются, либо совпадают. Во втором случае мы и получаем окружность, лежащую в пересечении.

**IV.24.** Для того чтобы результат задачи был верен, достаточно, чтобы это было просто ограниченное тело. Проблема может состоять в том, что есть, скажем, шары радиусов 2, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, …, содержащие данное тело, но нет шара радиуса не больше 1. Для доказательства того, что такого быть не может, возьмём нашу последовательность шаров с убывающим радиусом и найдём для неё «предел». Это значит, что мы выберем сначала центр этого шара так, чтобы сколь угодно близко к нему было бесконечно много центров шаров из нашей последовательности, а затем возьмём радиус шара в нашем примере равным 1. Это можно сделать именно в силу ограниченности тела (подробности можно найти в любом курсе анализа). Получившийся шар содержит всё данное тело. (Если оно хоть немножко «высовывается» из этого шара, то оно «высовывается» и из достаточно близких к нему шаров из последовательности.)

Если наименьших шаров два, то данное тело содержится и в их пересечении, но это пересечение, очевидно, содержится в шаре меньшего радиуса. Таким образом, наименьший шар единственный.

Аналогично решается проблема с наибольшим шаром, содержащимся в теле. Такой наибольший шар не обязан быть единственным, например, он не единственный для цилиндра.

**IV.25.** В обоих случаях ответ «да».

Продолжим образующие цилиндра (конуса). Тогда основание просто одно из сечений. Проведём через его центр сечение, перпендикулярное оси цилиндра (конуса). Это эллипс. Мы можем воспринимать наш цилиндр (конус) как прямой, но с эллиптическим основанием. Круговое сечение наклонено по отношению к новому основанию. Можно провести ещё одно сечение, наклонённое по отношению к основанию на тот же угол, но в другую сторону. Оно также будет круговым (из соображений симметрии).

Формально говоря, ответ на вопрос про цилиндр может оказаться отрицательным. Представьте себе очень низкий цилиндр. Тогда второе круговое сечение бесконечного цилиндра может просто не поместиться внутри его. В случае с конусом такой опасности нет, всегда можно уменьшить размер кругового сечения и уместить его внутри конуса, просто параллельно сдвигая это сечение к вершине.

**IV.26.** Первая часть задачи решается очень просто, достаточно заметить, что расстояние между точками касания двух полушаров и плоскости никак не зависит от третьего полушара. Оно равно $\sqrt{d^2+(r_1-r_2)^2}$, где $d$ — расстояние между центрами, а $r_1$ и $r_2$ — радиусы полушаров.

Для второй части полезнее описать возможное решение, чем вывести точную формулу. Возможная идея решения состоит в следующем: будем проводить всевозможные плоскости, касающиеся двух полушаров. Их все можно описать одним параметром: скажем, углом, который они образуют с данной плоскостью. Можно вычислить расстояние от плоскости до центра третьего полушара в зависимости от этого параметра, а затем приравнять это выражение к известному радиусу третьего полушара.

По-видимому, реализация этого пути (впрочем, как и любого другого) весьма сложна, особенно если решать задачу в общем виде. Разумно после самого общего его обсуждения (например, такого, как приведено выше) задать конкретные значения расстояний и радиусов, причём полезно взять, например, два радиуса одинаковыми. Если теперь в качестве первых двух полушаров выбрать те, радиусы которых одинаковы, задача существенно упрощается.

**IV.27.** Возможны два варианта: оси конусов направлены в одну сторону или в разные. Однако в обоих случаях ответ может быть как положительным, так и отрицательным. Проведём плоскость через оси обоих конусов и будем поворачивать её вокруг прямой, проходящей через вершины конусов. Если эта плоскость станет опорной для одного конуса, то она станет опорной и для второго (эта плоскость образует равные углы с осями конусов). Поэтому весь вопрос в том, найдётся ли такая плоскость, касающаяся одного из конусов. Ответ на этот вопрос зависит от того, находится ли вершина одного из конусов внутри бесконечного (в обе стороны) конуса, являющегося продолжением второго. Если находится, то ответ на вопрос задачи «нет», иначе — «да».

**IV.28.** а) С помощью циркуля мы можем измерить расстояние между двумя точками на сфере (по крайней мере между не слишком удалёнными точками) и перенести это расстояние на плоскость. Возьмём три точки на данной окружности, измерим расстояния между ними и построим на плоскости треугольник со сторонами, равными этим расстояниям. Радиус описанной около этого треугольника окружности совпадает с искомым радиусом.

б) Как понятно из пункта «а», нам достаточно найти три точки, лежащие на большой окружности данной сферы. Возьмём две произвольные точки на сфере $A$ и $B$ и проведём две пересекающиеся окружности на сфере, поставив ножку циркуля сначала в точку $A$, а затем в точку $B$, с одинаковыми растворами циркуля. У нас получились две точки (пересечения окружностей), равноудалённые от $A$ и $B$. Изменив раствор циркуля, получим ещё две такие точки. Все они лежат на одной плоскости, которая является геометрическим местом точек, равноудалённых от $A$ и $B$. Но центр сферы также лежит на этой плоскости. Следовательно, эта плоскость пересекает сферу по большой окружности, и мы нашли уже четыре точки, лежащие на этой окружности.

**IV.29.** Чтобы построить на сфере окружность с помощью циркуля, нужно знать точку на сфере, в которую следует поставить ножку циркуля (это вовсе не центр окружности, но мы будем называть эту точку «центр» для простоты чтения), и раствор циркуля (а это совсем не радиус).

В пунктах «а»—«г» достаточно узнать, каким раствором циркуля нужно рисовать указанные окружности. После того как раствор циркуля будет найден, для нахождения центра потребуется совсем немного. В пунктах «а» и «в» просто проведём окружность с известным раствором циркуля с центром в данной точке и возьмём в качестве искомого центра любую точку на этой окружности. В пунктах «б» и «г» чуть сложнее — проведём две окружности с известным раствором циркуля и центрами в двух данных точках. Искомый центр — точка пересечения этих окружностей.

Осталось найти раствор циркуля. Для этого проведём несколько построений на плоскости. Прежде всего мы можем построить отрезок длины $R$, где $R$ — радиус сферы (см. задачу **IV.28**). Построим отрезок длины $R\sqrt{2}$ —это искомый раствор циркуля в пунктах «а» и «б». Пусть теперь $r$ — данный радиус в пунктах «в» и «г». Построим равнобедренный треугольник с боковой стороной $R$ и высотой к боковой стороне $r$. Длина его основания и есть искомый раствор циркуля.

Чтобы построить точку на сфере, диаметрально противоположную данной, достаточно провести через данную точку две разные большие окружности.

**IV.30.** Здесь возможны разные идеи. Можно, например, воспользоваться способом определения радиуса из задачи **IV.28**. Но это, видимо, не слишком удачная идея хотя бы потому, что на реальной стеклянной линзе трудно проводить окружности циркулем. Наиболее реально, по-видимому, исследовать оптические свойства линзы (например, найти её фокусы) и исходя из них рассчитать радиус.

**IV.31.** Будем считать, что по высоте проём достаточно высокий и проблема состоит только в том, пролезет ли в него стол по ширине $a + b + c$, где $a$, $b$, $c$ — отрезки диаметра крышки, проходящего через одну из ножек.

Нарисуйте вид сбоку этого стола так, чтобы две ножки на вашем рисунке слились в одну (длину одной ножки обозначим через $l$). Повернём стол так, чтобы вид сбоку стал видом сверху, и будем проносить его в проём: сначала занесём одну ножку, затем крышку и, наконец, оставшиеся две ножки. При этом, чтобы стол успешно прошёл через дверь, необходимо и достаточно, чтобы для расстояний, обозначенных на вашем рисунке $a$, $b$, $c$ и $l$, и ширины проёма $d$ выполнялись соотношения

$$((a+c)^2+l^2)\cdot\frac{a}{a+c} \leqslant d, \quad ((b+c)^2+l^2)\cdot\frac{b}{b+c} \leqslant d.$$

Решение задачи для стола с четырьмя ножками абсолютно аналогично, но теперь на нашем рисунке должны слиться две пары ножек.

**IV.32.** Попробуем объяснить, почему дуга какого-нибудь одного цвета (скажем, красного) является дугой окружности. Заметим, что все лучи красного цвета образуют с солнечными лучами один и тот же угол. Солнечные лучи можно считать параллельными (Солнце находится очень далеко от нас). Все красные лучи, которые попадают в глаз наблюдателя, проходят через одну точку и образуют один и тот же угол с направлением на Солнце. Следовательно, они составляют конус (круговой). Разумеется, наблюдатель, находящийся в вершине конуса, видит его как окружность.

## Примечания

В тексте отсутствуют решения нескольких задач. Это связано с разными причинами. Задачи **12.20** и **19.24** имеют много достаточно простых решений, которые не содержат особых идей. Обсуждение задач **14.52** и **15.38** завело бы нас слишком далеко, в то же время решения таких задач известны. Вопрос задачи **15.38** обсуждается в курсах географии и астрономии. Что касается задачи **14.52**, то такой прибор — оптический гониометр — существует, описание его устройства можно найти в учебнике по кристаллографии.

## ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

| Номер параграфа | Содержание материала | Количество часов | | Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий) |
|---|---|---|---|---|
| | | 2 часа в неделю | 3 часа в неделю | |
| Введение | | 1 | 1 | |
| **Глава I. Основания стереометрии** | | **17** | **18** | |
| 1 | Аксиомы стереометрии (и повторение основных теорем о треугольниках, п. 20.1) | 6 | 6 | Уметь доказывать простейшие следствия из аксиом, понимать, какие из аксиом равносильны в различных аксиоматиках |
| 2 | Способы задания прямых и плоскостей в пространстве | 2 | 2 | Уметь доказывать теоремы о задании прямых и плоскостей |
| 3 | Взаимное расположение двух прямых в пространстве | 3 | 3 | Уметь доказывать признак скрещивающихся прямых и применять его при решении задач. Уметь сводить задачи о параллельных и пересекающихся прямых к задачам планиметрии |
| 4 | Параллельное проектирование | 2 | 2 | Уметь доказывать и применять основные свойства параллельного проектирования, в том числе строить изображения плоских фигур |
| 5 | Существование и единственность. Построения | 2 | 2 | Уметь строить сечения простейших геометричес-ких тел методом следов |
| 6 | Об аксиомах | 1 | 1 | |
| | Решение задач | — | 1 | |
| | Контрольная работа № 1 | 1 | 1 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Глава II. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей** | | **19** | **24** | |
| 7 | Перпендикулярность прямой и плоскости (зеркальная симметрия) | 8 | 8 | Уметь доказывать признак перпендикулярности прямой и плоскости. Уметь применять признак для доказательства перпендикулярности конкретных прямых и плоскостей при решении задач. Уметь применять теорему о трёх перпендикулярах |
| 8 | Перпендикулярность плоскостей | 3 | 4 | Уметь доказывать перпендикулярность плоскостей и использовать её для доказательства перпендикулярности прямых при решении задач |
| 11 | Ортогональное проектирование | 1 | 1 | Уметь доказывать и использовать теорему о площади проекции |
| | Контрольная работа № 2 | 1 | — | |
| 9 | Параллельные плоскости | 3 | 5 | Уметь доказывать и использовать свойства и признак параллельных плоскостей, в том числе о паре параллельных плоскостей, проведённых через скрещивающиеся прямые |
| 10 | Параллельность прямой и плоскости | 2 | 3 | Уметь доказывать признак параллельности прямой и плоскости, использовать его при решении задач |
| | Решение задач | 1 | 2 | |
| | Контрольная работа № 2 (углубл.) | — | 1 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **§ 20. Вернёмся к планиметрии** | | — | 4 | |
| | п. 20.2. Теоремы Чевы и Менелая | — | 2 | Уметь доказывать теоремы Чевы и Менелая и использовать их для точного построения сечений фигур |
| | п. 20.5. Геометрические места точек | — | 2 | Использовать основные геометрические места фигур при решении задач, в том числе на построение |
| **Глава III. Расстояния и углы** | | **11** | **20** | |
| 12 | Расстояние между фигурами | 3 | 6 | Уметь определять тот отрезок, длина которого есть расстояние между данными фигурами. Уметь находить расстояние от точки до плоскости, а также между скрещивающимися прямыми (в том числе как расстояние между содержащими их параллельными прямыми и проекциями этих прямых на плоскость, перпендикулярную одной из них) |
| 13 | Пространственная теорема Пифагора | 1 | 2 | Уметь использовать пространственную теорему Пифагора при решении задач |
| 14 | Углы.<br>Дополнение к § 14 | 6 | 8 | Уметь выполнять необходимые построения для нахождения углов (между скрещивающимися прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями). Уметь находить углы в известных геометрических телах. Уметь использовать теорему синусов и теорему косинусов для трёхгранных углов при решении задач, в том числе при нахождении углов в неправильных пирамидах |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Решение задач | — | 3 | |
| | Контрольная работа № 3 | 1 | 1 | |
| **Глава IV. Пространственные и плоские фигуры и тела** | | **20** | **30** | |
| 15 | Сфера и шар.<br>Дополнение к § 15 | 4 | 6 | Уметь решать задачи на нахождение радиусов касающихся шаров, расстояний до плоскостей, пересекающих шары, на нахождение радиусов окружностей на сферах |
| 16 | Опорная плоскость. Выпуклые фигуры | 1 | 2 | Уметь доказывать простейшие утверждения о выпуклых фигурах |
| 17 | Цилиндры.<br>Дополнение к § 17 | 2 | 4 | Уметь находить различные элементы цилиндра в сочетании с шарами и многогранниками |
| 18 | Конусы. Усечённые конусы.<br>Дополнение к § 18 | 3 | 7 | Уметь находить различные элементы конуса в сочетании с шарами и многогранниками |
| 19 | Тела | 1 | 1 | Уметь доказывать по определению, что фигура является / не является телом |
| 20 | Вернёмся к планиметрии.<br>п. 20.3. Геометрия окружности.<br>п. 20.4. Вписанные и описанные четырёхугольники.<br>п. 20.6. Решение задач с помощью геометрических преобразований | 8 | <br>2<br>2<br>2 | Уметь решать задачи с использованием признаков / свойств вписанных и описанных четырёхугольников.<br>Уметь находить величины с использованием теорем о пропорциональных отрезках.<br>В простейших случаях использовать геометрические преобразования для доказательства утверждений |
| | Решение задач | — | 3 | |
| | Контрольная работа № 4 | 1 | 1 | |
| | Резерв | — | 9 | |

# СОДЕРЖАНИЕ